**Asignatura MAT-415 “Método de elementos finitos mixtos”**
**Segundo semestre de 2017**
**Michael Karkulik**
`mkarkulik.mat.utfsm.cl/teaching/17SS_fem.html`

# Tarea 3

Entrega hasta el 2 de Noviembre en secretaria del Departamento de Matemática.

1. Sea $b : V \times M \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua, donde $V$ y $M$ espacios de Hilbert. Supongamos que $V_N \subset V$ y $M_R \subset M$ son subespacios cerrados. Muestre que la condición inf-sup

$$\inf_{\mu_R \in M_R} \sup_{v_N \in V_N} \frac{b(v_N, \mu_R)}{\|v_N\|_V \|\mu_R\|_M} \geq \gamma,$$

donde $\gamma > 0$ no depende de $V_N$ y $M_R$, implica que existe un operador lineal de Fortin $\Pi_N : V \to V_N$ tal que

$$v(v - \Pi_N v, \mu_R) = 0 \quad \text{para todo } \mu \in M_R,$$
$$\|\Pi_N v\|_V \leq \widetilde{C} \|v\|_V, \quad \text{para todo } v \in V,$$

y $\widetilde{C}$ no depende de $V_N$.

2. Sean $a : V \times V \to \mathbb{R}$ y $b : V \times M \to \mathbb{R}$ formas bilineales continuas, y supongamos que $V_N \subset V$ y $M_R \subset M$ son subespacios que cumplen con las condiciónes de Brezzi, es decir,

$$\text{a eliptica en el kernel discreto } \ker B_N \text{ con constante } \alpha_{N,R} \tag{1}$$
$$\inf_{\mu_R \in M_R} \sup_{v_N \in V_N} \frac{b(v_N, \mu_R)}{\|v_N\|_V \|\mu_R\|_M} \geq \gamma_{N,R}, \tag{2}$$

donde $\alpha_N, R\ \gamma_{N,R}$ depende de $V_N$ y $M_R$.

   (a) Si aumentamos el espacio $V_N$, ¿cuáles de las condiciones (1), (2) hay que verificar de nuevo?

   (b) Si aumentamos el espacio $M_R$, ¿cuáles de las condiciones (1), (2) hay que verificar de nuevo?

3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un polígono y $\mathcal{T}_h$ una malla uniforme, es decir, existen dos constantes $C_1, C_2 > 0$ tal que $C_1 h \leq \operatorname{diam}(K) \leq C_2 h$ para todo $K \in \mathcal{T}_h$.

   (a) Muestre la desigualdad inversa, es decir, existe una constante $C_{\text{inv}} > 0$ tal que

$$h \|\nabla u_h\|_{L_2(\Omega)} \leq C_{\text{inv}} \|u_h\|_{L_2(\Omega)}$$

   para todo $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$.

(b) Sea $H^{-1}(\Omega)$ el espacio dual a $H_0^1(\Omega)$. Muestre la desigualdad inversa

$$h\|u_h\|_{L_2(\Omega)} \leq C_{\text{inv}}\|u_h\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

para todo $u_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)$.