Asignatura MAT-415 “Método de elementos finitos mixtos”
Segundo semestre de 2017
Michael Karkulik
`mkarkulik.mat.utfsm.cl/teaching/17SS_fem.html`

Tarea2

Entrega hasta el 5 de Octubre en secretaria del Departamento de Matemática.

1. La desigualdad de Friedrichs-Poincaré dice que si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es un dominio conexo, entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u - m(u)\|_{L_2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \quad \text{para todo } u \in H^1(\Omega),$$

   donde $m(u)$ es el promedio de u sobre Ω. El objetive de este ejercicio es demostrar la desigualdad en un caso especial. Si $I = (0, h)$ es un intervalo, muestre que

$$\|u - m(u)\|_{L_2(I)} \leq h\|u'\|_{L_2(I)} \quad \text{para todo } u \in H^1(I).$$

   Sugerencia: (i) supone que $u \in C^\infty(I) \cap H^1(I)$, escribe $u(x) - m(u) = h^{-1}\int_0^h (u(x) - u(y))dy$ y aplica el teorema fundamental de cálculo para demostrar la desigualdad. (ii) Usando la densidad de $C^\infty(I) \cap H^1(I)$ en $H^1(I)$, concluye que la desigualdad es cierto para todo $u \in H^1(I)$.

2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio conexo y Lipschitz. Para datos $f \in L_2(\Omega)$ y $g \in L_2(\Gamma)$ que satisfacen $\int_\Omega f + \int_\Gamma g = 0$, queremos resolver el problema de Neumann

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega, \\ \partial_n u &= g \quad \text{sobre } \Gamma. \end{aligned} \tag{1a}$$

   Una solución de la ultima ecuación se define modulo una constante, por eso complementamos el problema con la condición adicional

$$\int_\Omega u(x)\,dx = 0. \tag{1b}$$

   (a) Encuentre una formulación variacional de tipo punto silla del problema (1) y muestre que tiene unica solución, y la solución depende continuamente de los datos.
   (b) Encuentre una formulación discreta tal que los constantes inf-sup discretas no dependen de los espacios discretos.

3. Escriba una función `[x] = solve_inhom_dirichlet[coordinates,elements,dirichlet,f,g]` que calcula la solución de elements finitos mixtos $u_N \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ del problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega, \\ u &= g \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2}$$

como se presentó en clases. La discretización de la forma bilineal $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ ya la hicimos en la primera tarea (cuidado: ahora trabajamos con $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ y no con $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$). Eso es, si $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ es la base nodal del espacio $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$, entonces ya tenemos la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ definida por $\mathbf{A}_{i,j} = \int_\Omega \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i \, dx$.

Ahora sea $\{\xi_j\}_{j=1}^R$ la base nodal de $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}|_\Gamma)$. Falta calcular la discretización $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{R\times N}$ dada por

$$\mathbf{B}_{i,j} = b(\varphi_j, \xi_i) = \int_\Gamma \xi_j \cdot \varphi_i.$$

Por eso, supongamos que en el vector `coordinates`, los nodos en la frontera aparecen al principio.

(a) Escriba una función `Bloc = stima_b[zi,zj]`, que calcula una matriz $\mathbf{B}_{\text{loc}}$, dada por

$$\mathbf{B}_{\text{loc}} := \begin{pmatrix} \int_E \xi_j\varphi_j & \int_E \xi_j\varphi_i \\ \int_E \xi_i\varphi_j & \int_E \xi_i\varphi_i, \end{pmatrix}$$

donde $E \subset \Gamma$ es un elemento en la frontera dado por los nodos z_i y z_j.

(b) Para calcular la matrix $\mathbf{B}$, hay que hacer un loop sobre los elementos $E \in$ `dirichlet` de la frontera, calcular $\mathbf{B}_{\text{loc}}$, y sumar los valores de $\mathbf{B}_{\text{loc}}$ a la matrix $\mathbf{B}$.

(c) Aplica su codigo para diferentes dominios, con $f = 0$ y cierta función g. Imprime el error $\|(\nabla u - \nabla u_j)\|_{L_2(\Omega)}^2$ con la misma idea de la tarea 1.