Asignatura MAT-415 “Método de elementos finitos mixtos”
Segundo semestre de 2017
Michael Karkulik
`mkarkulik.mat.utfsm.cl/teaching/17SS_fem.html`

Tarea 1

Entrega hasta el 7 de Septiembre en secretaria del Departamento de Matemática.

1. (a) Sea V un espacio de Hilbert, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y elíptica. Muestre que la *energia* $\|u\|_a := \sqrt{a(u,u)}$ es una norma en V y que existen constantes $C_1, C_2 \geq 0$ tal que

$$C_1\|u\|_a \leq \|u\|_V \leq C_2\|u\|_a.$$

   (b) Supongamos adicionalmente que a es simétrica, $\ell \in V'$ es una forma lineal continua y que $V_N \subset V$ es un subespacio cerrado. Sea $u \in V$ la solucion del problema $a(u,v) = \ell(v)$ para todo $v \in V$, y $v_N \in V_N$ su aproximación de Galerkin, es decir, $a(u_N, v_N) = \ell(v_N)$ para todo $v_N \in V_N$. Usando la ortogonalidad de Galerkin, muestre que

$$\|u - u_N\|_a^2 = \|u\|_a^2 - \|u_N\|_a^2. \tag{1}$$

2. Sea $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ una matriz y $\|\cdot\|$ la norma euclidiana.

   (a) Muestre que

$$\inf_{\|u\|=1} \sup_{\|v\|=1} u^\top Bv > 0 \Longleftrightarrow \ker B^\top = \{0\},$$
$$\forall v \neq 0 : \sup_{\|u\|=1} u^\top Bv > 0 \Longleftrightarrow \ker B = \{0\}.$$

   (b) Sea $n = m$. Muestre que si

$$\inf_{\|u\|=1} \sup_{\|v\|=1} u^\top Bv \geq \gamma > 0,$$

   entonces B es invertible y $\|B^{-1}\| \leq \gamma^{-1}$.

3. (a) En la pagina del curso `mkarkulik.mat.utfsm.cl/teaching/17SS_fem.html` hay dos links para descargar el Software *50 lines of Matlab*. El archivo `Software1/fem2d/fem2d.m` muestra como resolver un problema con condiciones de frontera mixtos del Laplaciano en $\mathbb{R}^2$ con una malla de triangulos y paralelogramos[1].

[1]Capitulos 2-8 en la documentación del Software.

Nosotros queremos trabajar solamente con condiciones de Dirichlet homogeneos y mallas de triangulos $\mathcal{T}$. Una malla $\mathcal{T}$ se describe con un vector de nodos `coordinates`, un vector de triangulos `elements`, y un vector de los ejes de la frontera `dirichlet`[2].

Escriba una función `[uN2] = solve_dirichlet[coordinates,elements,f]` que calcula la solución de elementos finitos $u_N \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ del problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2}$$

El input `f` es un *function handle* para el f, y el output `uN2` es la energia $\|\nabla u_N\|^2_{L_2(\Omega)}$.

(b) En la pagina del curso hay un link para descargar los archivos `provideGeometricData.m` y `refineNVB.m` (se necesita ambos, dado que el segundo se basa en el primero). Supongamos que `coordinates`, `elements`, y `dirichlet` son los datos de la malla $\mathcal{T}_j$. Definimos `nE = size(elements,1)` el numero de triangulos. El orden

```
[cnew,enew,dnew]=refineNVB(coordinates,elements,dirichlet,1:nE)      (3)
```

calcula un refinamiento $\mathcal{T}_{j+1}$, dado por `cnew`, `enew`, y `dnew`. Cada triangulo de $\mathcal{T}$ se divide en cuatro triangulos y donde se respeta las condiciones que vimos en clases.

Usando su función `solve_dirichlet` del ejercicio 3a, escriba una función

`uniform_dirichlet[coordinates,elements,dirichlet,f,J]`,

donde se calcula soluciones de elementos finitos u_j de (2) a traves de una sucesión de mallas $(\mathcal{T}_j)_{j=1}^{\mathtt{J}}$, donde $\mathcal{T}_{j+1}$ se calcula de $\mathcal{T}_j$ segun (3), y $\mathcal{T}_1$ esta dado por `coordinates`, `elements`, y `dirichlet`. Al final, use (1) para imprimir del orden de convergencia del error $\|\nabla(u - u_j)\|^2_{L_2(\Omega)}$ sobre los numeros de elementos de las mallas T_j en un plot doble logaritmico[3] (no conocemos $\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}$, pero podemos suponer que $\|\nabla u_J\|_{L_2(\Omega)}$ ya es una buena aproximación).

(c) Aplica su codigo de 3b para un dominio cuadratico y para un dominio no convexo (por ejemplo con la forma de un "L"), con $f = 1$. ¿Cual orden de convergencia se observa para los dos dominios?

[2] En la pagina del curso hay un ejemplo.

[3] `loglog` en `Matlab`