

Álgebra lineal

Michael Karkulik
`michael.karkulik@usm.cl`

Contents

1	Repaso: Lógica y Conjuntos	5
1.1	Proposiciones, conectivas lógicas, y fórmulas proposicionales	7
1.2	Fórmulas proposicionales universales	10
1.3	Más sobre implicaciones	11
1.4	Cuantificadores	12
1.5	Conjuntos	13
1.6	Relaciones y funciones	17
2	Espacios vectoriales	23
2.1	Preliminares algebraicos	23
2.2	Espacios vectoriales	25
2.3	Ejemplos de espacios vectoriales	27
2.4	Subespacios	29
2.4.1	Intersecciones de subespacios	30
2.4.2	Uniones y sumas de subespacios	32
2.5	Bases y Dimension	32
3	Transformaciones lineales	41
3.1	Repaso: Matrices	49
3.2	Transformaciones lineales y matrices	55
3.2.1	Cambio de base	58
4	Espacios duales	61
5	Valores y vectores propios	67
5.1	Diagonalización	73
5.2	El teorema de Cayley-Hamilton	75
5.3	La forma de Jordan	77
6	Espacios con producto interno	79
6.1	Bases ortonormales	82
6.2	Complementos y proyecciones ortogonales	86

6.3	Transformacions adjuntas	87
-----	------------------------------------	----

Chapter 1

Repaso: Lógica y Conjuntos

Si preguntamos a alguien lo que dice el teorema de Pitágoras, la respuesta usualmente es

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1.1}$$

Sin embargo, la formula (1.1) por si misma no es el enunciado del Teorema de Pitágoras. La formula (1.1) ni siquiera es una proposición matemática, pues no hace ninguna referencia a los valores a, b, c (y para valores a, b, c generales, la formula es falsa). Para completar el teorema, necesitamos **premisas** para los valores a, b, c , y la formula (1.1) será la **conclusión**.

Teorema 1 (Pitágoras). *Si a, b son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo y c la longitud de la hipotenusa, entonces $a^2 + b^2 = c^2$.*

El Teorema 1 contiene en su premisa varias frases que tenemos que explicitar (*cateto, hipotenusa*). En lenguaje matemático se habla de una **definición**.

¿Que es una definición? Una definición da sentido matemático a una palabra, frase, notación. Una nueva definición tiene que ser precisa e integrarse de expresiones conocidas. Una palabra, frase, notación se puede definir *única vez*. La motivación para hacer una nueva definición es hacer referencia explícita a conceptos/objetos interesantes, destacar propiedades importantes, o nombrar objetos que tienen propiedades importantes.

Empezamos con un simple ejemplo. Usaremos la notación $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ para los números naturales.

Definición 2. *Un número natural $n \in \mathbb{N}$ se llama **par**, si $n = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$.*

Usando la definición 2, podemos formular un resultado matemático simple. En lenguaje matemático se habla de un **teorema**.

Teorema 3. *Sea n un número natural par. Entonces n^2 es par.*

¿Que es un teorema? Un teorema es un enunciado matemático que afirma la veracidad de un resultado matemático. La formulación del teorema tiene que ser clara y todos los objetos, frases, y palabras que aparecen en el teorema tienen que definirse con anticipación.

La veracidad de un resultado matemático tiene que demostrarse usando inferencia lógica y rigurosa. Experimentos, mediciones, observaciones, verificaciones de casos especiales, **no son** herramientas rigurosas para demostraciones matemáticas.

Demostración de Teorema 3. Sea n un número natural. Según Definición 2, $n = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $n^2 = n \cdot n = 2m \cdot 2m = 2 \cdot 2m^2$. Por lo tanto, n^2 tiene la forma $n^2 = 2\tilde{m}$, donde $\tilde{m} = 2m^2$. Por lo tanto, n^2 es par. $\square$

El Teorema de Pitágoras tal como el Teorema 3 tienen la forma de una **implicación**,

Si premisa, entonces conclusión.

En la formulación de un teorema tiene que quedar claro cuales son las premisas, y cual es la conclusión. Por ejemplo, en el Teorema 3, la premisa es *n un número natural par*, y la conclusión es *n² es par*. Prácticamente todos los resultados matemáticos tienen forma de implicación (aunque no siempre se formulan así tan claro). ¿Que significa la veracidad de una implicación? En la vida cotidiana usamos implicaciones para expresar los siguientes (equivalentes) situaciones:

- Si premisa, entonces conclusión.
- Conclusión si premisa.
- Premisa es suficiente para conclusión.
- Si premisa ha pasado, entonces también conclusión.
- Conclusión es necesario para premisa.

Consideramos la implicación “*Si voy de vacaciones, entonces voy a leer un libro*”. Aunque esta implicación sea correcta, no significa para nada que voy de vacaciones, o que voy a leer un libro. La veracidad de una implicación significa que un hecho (la premisa) conlleva otro hecho (la conclusión). En otras palabras, si voy de vacaciones sin leer un libro, entonces la implicación será falsa. Hay una gran diferencia entre implicaciones que se usan en la vida cotidiana y las implicaciones que vamos a ocupar para hacer matemática. En la vida cotidiana, una implicación siempre contiene causalidad. No se suelen usar implicaciones sin causalidad como “*Si el pasto es verde, entonces el cielo es azul*”. Sin embargo, una implicación matemáticamente correcta no necesariamente contiene causalidad, su veracidad depende **solamente** de las veracidades de premisa y conclusión.

1.1 Proposiciones, conectivas lógicas, y fórmulas proposicionales

En el mundo matemático tenemos que expresar constantemente diversos enunciados y combinarlos para fabricar (es decir, **demostrar**) resultados. Para que un resultado pueda ser correcto, la expresión y la combinación de enunciados tiene que seguir ciertas reglas de lógica. Una **proposición** A es un enunciado que tiene un único **valor lógico** $v(A)$. Es decir, o es **correcto** $v(A) = c$ o es **falso** $v(A) = f$ (*principio del tercero excluido*), pero no las dos al mismo tiempo (*principio de no contradicción*). Notamos que no es necesario que conozcamos el valor lógico de una proposición o que seamos capaces de conocerlo.

Ejemplo 4 (Proposiciones). *Los siguientes enunciados son ejemplos de proposiciones.*

- A_1 : Pablo Neruda obtuvo el Premio Nobel.
- A_2 : La tierra es el único planeta del universo que tiene vida.
- A_3 : $1 + 2 = 3$.
- A_4 : $\pi = 3.14$.
- A_5 : Hay una infinita cantidad de números primos n tal que $n + 2$ también es un número primo.

Claramente, $v(A_1) = c$ y $v(A_3) = c$. También sabemos que $v(A_4) = f$. La proposición A_5 tiene un valor lógico único, pero en este momento este valor es desconocido, los matemáticos todavía no lo han descubierto. El valor lógico de A_2 también es único, pero es probable que se va a descubrir nunca.

Ejemplo 5 (No proposiciones). *Los siguientes enunciados no son proposiciones.*

- B_1 : Los poemas de Pablo Neruda son geniales.
- B_2 : La tierra es el único planeta del.
- B_3 : $1 + 2$.

Un caso especial será el enunciado

- C_1 : n es un número par.

El enunciado C_1 no es una proposición en estricto rigor: depende de una variable n y por lo tanto no tiene valor lógico único. La variable n se llama **variable libre**, y usaremos la notación $C_1(n)$ para anotar que C_1 depende de n . $C_1(n)$ se transforma en una proposición si se asigna un valor particular a n . Se dice que $C_1(n)$ es una **proposición condicional**. En lo que sigue, vamos a usar solamente la palabra **proposición** para referirnos a proposiciones y proposiciones condicionales. Es posible usar **conectivas lógicas** para combinar proposiciones, y así fabricar nuevas proposiciones. Las conectivas lógicas más comunes son las siguientes:

- (i) **Negación:** Agregamos a una proposición A la palabra *no*, entonces obtenemos la proposición $\neg A$, la negación de A . El valor lógico de $\neg A$ es c si el valor lógico de A es f y al revés:

A	$\neg A$
c	f
f	c

Hay que tener cuidado al negar proposiciones. Por ejemplo, la negación de “*Todos los perros son negros*” no es “*Todos los perros no son negros*”, sino “*Existen perros que no son negros*”.

- (ii) **Disyunción:** Combinamos dos proposiciones A y B con la palabra *o*, entonces obtenemos la proposición $A \vee B$, la disyunción de A y B . La proposición $A \vee B$ es correcta si A , o B , o ambas son correctas, en el caso contrario es falsa:

A	B	$A \vee B$
c	c	c
f	c	c
c	f	c
f	f	f

- (iii) **Conjunción:** Combinamos dos proposiciones A y B con la palabra *y*, entonces obtenemos la proposición $A \wedge B$, la conjunción de A y B . La proposición $A \wedge B$ es correcta si y solo si A y B son correctas ambas.

A	B	$A \wedge B$
c	c	c
f	c	f
c	f	f
f	f	f

- (vi) **Implicación:** Combinamos dos proposiciones A y B con las palabras *Si - entonces*, entonces obtenemos la proposición $A \Rightarrow B$, A implica B . La proposición A se llama *premisa*, y la proposición B *conclusión*.

Recordamos que queremos definir el valor lógica de $A \Rightarrow B$ para cada combinación de premisa y conclusión:

A	B	$A \Rightarrow B$
c	c	$?$
f	c	$?$
c	f	$?$
f	f	$?$

Recordamos la implicación “*Si voy de vacaciones, entonces voy a leer un libro*”. Si realmente voy de vacaciones (premisa correcta) y leo un libro (conclusión correcta), entonces la implicación es correcta, es decir, el valor lógico de $A \Rightarrow B$ es c . Para obtener el valor en la segunda fila, consideramos lo siguiente: A : “*Todo chileno es Pablo Neruda, y Pablo Neruda es humano*” es obviamente falso B : “*Todo chileno es humano*” obviamente correcto, y la implicación “*Si todo chileno es Pablo Neruda y Pablo Neruda es humano, entonces todo chileno es humano*”, obviamente correcta. Para asignar el valor en la última fila, consideramos A : “*Todo chileno es Pablo Neruda y Pablo Neruda es escritor*” y B : “*Todo chileno es escritor*”. Ambas son falsas, pero la implicación “*Si todo Chileno es Pablo Neruda y Pablo Neruda es escritor, entonces todo Chileno es escritor*”. Nos falta solamente el tercer caso, donde A es correcto y B es falso. Ya hemos visto en la introducción que si voy de vacaciones sin leer un libro, entonces “*Si voy de vacaciones, entonces voy a leer un libro*” es obviamente falso. Obtenemos lo siguiente:

A	B	$A \Rightarrow B$
c	c	c
f	c	c
c	f	f
f	f	c

Recordamos Teorema 3, que establece la veracidad de una implicación. Si la premisa es falsa, por ejemplo, $n = 3$, entonces el Teorema dice absolutamente nada sobre la paridad de 3^2 . Según la tabla de verdad de arriba, nos podríamos encontrar en la segunda o en la última fila, es decir 3^2 podría ser par o no. Obviamente no es par, pero Teorema 3 no permite concluir eso.

- (v) **Equivalencia:** Combinamos dos proposiciones A y B con las palabras *si y solo si*, entonces obtenemos la proposición $A \Leftrightarrow B$, A equivalente a B . La proposición $A \Leftrightarrow B$ es correcta siempre que A y B tengan el mismo valor lógico:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
c	c	c
f	c	f
c	f	f
f	f	c

Una expresión que contiene variables que representan proposiciones y conectivas lógicas se llama **fórmula proposicional**. Fórmulas proposicionales sintacticamente correctas tienen un valor lógico que depende de la asignación de los valores lógicos de las variables. También usaremos la proposición $A \Leftarrow B$, que significa nada mas que $B \Rightarrow A$. Notamos que $A \Rightarrow \vee B$ no es una fórmula proposicional, tampoco $A \neg (\Rightarrow B)$. Sin embargo, la sintaxis de fórmulas proposicionales no es materia de este curso.

1.2 Fórmulas proposicionales universales

Para demostrar resultados matemáticos (o para argumentar bien en general), necesitamos *reglas de inferencia* adecuadas. Es obligatorio usar *fórmulas proposicionales universales* (o *tautologías*), es decir, fórmulas proposicionales que siempre son correctas, independiente de la asignación de valores lógicos de las variables. Un ejemplo de tautología es “*Jose es chileno o Jose no es chileno.*” Esta proposición es correcta, no importa la nacionalidad de Jose. Presentamos una lista de tautologías comunes.

- (1) $A \vee \neg A$, principio del tercero excluido
- (2) $\neg(A \wedge \neg A)$, principio de no contradicción
- (3) $\neg\neg A \Leftrightarrow A$, negación doble
- (4) $(A \wedge B) \Rightarrow A$, eliminación de conjunción
- (5) $A \Rightarrow (A \vee B)$, introducción de disyunción
- (6) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$,
- (7) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$,
- (8) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$, contraposición,
- (9) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$, modus ponendo ponens,
- (10) $(\neg A \wedge (A \vee B)) \Rightarrow B$, modus tollendo ponens,
- (11) $(\neg B \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow \neg A$, modus tollendo tollens,
- (12) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$, modus barbara,
- (13) $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$.

Lema 6. 3086^2 es un número par.

Proof. Sea $A = “3086 \text{ es un número par}”$, y $B = “3086^2 \text{ es un número par}”$. Entonces el Teorema 3 establece $A \Rightarrow B$. Sabemos que 3086 es un número par, es decir $v(A) = c$. Por modus ponendo ponens obtenemos $v(B) = c$, es decir 3086^2 es par. $\square$

Lema 7. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si n^2 no es par, entonces n no es par.

Proof. Sea $A = “n \text{ es un número par}”$, y $B = “n^2 \text{ es un número par}”$. El Teorema 3 establece $A \Rightarrow B$. Sabemos que n^2 no es par, es decir $v(B) = f$, o sea $v(\neg B) = c$. Por modus tollendo tollens obtenemos $v(\neg A) = c$, es decir n no es par. $\square$

1.3 Más sobre implicaciones

Maneras equivalentes de anotar una implicación

Usamos una implicación $A \Rightarrow B$ para decir que *conclusión es necesaria para la premisa*. En otras palabras, si no se cumple la conclusión, entonces tampoco la premisa. Si no se cumple B , entonces la única opción es que se cumple $\neg A$. Vemos entonces que $A \Rightarrow B$ es equivalente a $\neg A \vee B$, que es justamente la fórmula (13) de arriba.

Es importante notar que $A \Rightarrow B$ no es equivalente a $\neg A \Rightarrow \neg B$, aunque en la vida cotidiana muchas veces se ocupa esta equivalencia. Por ejemplo, muchos padres dicen a sus hijos *Si no ordenas tu habitación, entonces no te compraré un helado*, o sea $A \Rightarrow B$. Esta proposición no dice lo que pasa si el hijo realmente ordena su habitación. Sin embargo, los hijos entienden *Si ordenas tu habitación, entonces te compraré un helado*, o sea $\neg A \Rightarrow \neg B$.

El orden importa

Notamos que el orden de premisa y conclusión importa para una implicación: “*Si soy Pablo Neruda, entonces soy chileno*” no es lo mismo que “*Si soy chileno, entonces soy Pablo Neruda*”. La primera proposición es correcta, la segunda obviamente falsa. Es decir $A \Rightarrow B$ **no es equivalente a** $B \Rightarrow A$.

Sobre la veracidad de premisa y conclusión

Destacamos que la veracidad de la proposición $A \Rightarrow B$ **no dice nada** sobre la veracidad de A o B . Recordamos el ejemplo del inicio, “*Si voy de vacaciones, entonces voy a leer un libro*”. Esta implicación por separada no dice que voy de vacaciones, tampoco dice que voy a leer un libro. Sin embargo, si la última implicación es cierta, y si de verdad voy de vacaciones (la premisa es correcta), entonces voy a leer un libro (la conclusión es correcta). Eso se refleja en el modus ponendo ponens de arriba, $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$.

La negación de una implicación

Dado que $A \Rightarrow B$ es una proposición, nos podemos preguntar por la negación A **no implica** B , $\neg(A \Rightarrow B)$. Eso es correcto si y solo si $A \Rightarrow B$ es falso, y según la tabla de verdad de $A \Rightarrow B$ eso ocurre solo cuando A es correcto y B es falso, es decir si y solo si $A \wedge \neg B$. Notamos que eso también lo podemos concluir desde (3) y (13),

$$\neg(A \Rightarrow B) \stackrel{(13)}{\Leftrightarrow} \neg(\neg A \vee B) \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} A \wedge \neg B.$$

Proposiciones falsas implican proposiciones correctas

Notamos que una implicación $A \Rightarrow B$ es correcta, aún si A es falso y B es correcto. En otras palabras, **premisas falsas pueden implicar conclusiones correctas**. Por ejemplo, supong-

amos la premisa (falsa) $-1 = 1$. Elevando al cuadrado los dos lados obtenemos la conclusión (correcta) $1 = 1$.

1.4 Cuantificadores

Expresiones, tantas matemáticas como cotidianas, contienen frases como “*para todo . . .*”, o “*existe un . . .*”. Como ya mencionamos arriba, la negación de “*Todos los perros son negros*” no es “*Todos los perros no son negros*”, sino “*Existen perros que no son negros*”. Para formalizar expresiones de este estilo, se introducen **cuantificadores**.

El cuantificador universal: Si $A(x)$ es una proposición que depende de una variable x , y M es un conjunto, entonces la proposición

$$\forall x \in M : A(x)$$

es correcta si y solo si

para todo $x \in M$ la proposición $A(x)$ es correcta.

El cuantificador existencial: Si $A(x)$ es una proposición que depende de una variable x , y M es un conjunto, entonces la proposición

$$\exists x \in M : A(x)$$

es correcta si y solo si

existe por lo menos un $x \in M$ tal que la proposición $A(x)$ es correcta.

Por ejemplo, sea $A(x) = “x \text{ es un número par}”$. Entonces,

- $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ es falso (no todos los números naturales son pares),
- $\exists n \in \mathbb{N} : \neg A(n)$ es correcto,
- $\forall n \in \mathbb{N} : (A(n) \Rightarrow A(n^2))$ es correcto (por el Teorema 3),
- $\forall n \in \mathbb{N} : (\neg A(n^2) \Rightarrow \neg A(n))$ (por Lema 7).

Es comun trabajar con proposiciones que contienen cuantificadores combinados. Por ejemplo, consideramos la proposición

“*Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ existe un número natural $m \in \mathbb{N}$ tal que m es mayor que n* ”.

Usando cuantificadores, podemos anotar esta proposición como

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : m > n.$$

Lema 8. *La proposición $(\forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : m > n)$ es correcta.*

Proof. tbc □

Notamos que cuantificadores universales y existenciales no se pueden intercambiar en general. Eso se manifiesta en la última demostración, pues el m que se elige depende de n . La proposición

“Existe un número $m \in \mathbb{N}$ tal que para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ m es mayor que n ”

es obviamente falsa.

Tal como en la sección XXX, presentamos una lista de fórmulas proposicionales universales que contienen cuantificadores, que sirven como reglas de inferencia en demostraciones.

- (1) $\neg(\forall x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$
 $\neg(\exists x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$
- (2) $(\forall x \in M \forall y \in N : A(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \in N \forall x \in M : A(x, y))$
 $(\exists x \in M \exists y \in N : A(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y \in N \exists x \in M : A(x, y))$
 $(\exists x \in M \forall y \in N : A(x, y)) \Rightarrow (\forall y \in N \exists x \in M : A(x, y))$

Destacamos que la implicación $(\exists x \in M \forall y \in N : A(x, y)) \Leftarrow (\forall y \in N \exists x \in M : A(x, y))$ no es correcta, como explicamos arriba.

- (3) $\forall x \in M : ((\forall y \in M : A(y)) \Rightarrow A(x))$
 $\forall x \in M : (A(x) \Rightarrow (\exists y \in M : A(y)))$
- (4) $(\forall x \in M : A(x)) \wedge B \Leftrightarrow \forall x \in M : (A(x) \wedge B)$
 $(\exists x \in M : A(x)) \wedge B \Leftrightarrow \exists x \in M : (A(x) \wedge B)$

Además, se usan las siguiente notaciones: $\exists!x$ significa que existe un único x , es decir,

$$\exists!x \in M : A(x) \Leftrightarrow \exists x \in M : A(x) \wedge (\forall x, y \in M : A(x) \wedge A(y) \Rightarrow y = x).$$

Notamos la siguiente tautología,

- (5) $\exists!x \in M : A(x) \Rightarrow \exists x \in M : A(x).$

El cuantificador $\nexists x$ significa que no existe x , es decir

$$\nexists x \in M : A(x) \Leftrightarrow \neg(\exists x \in M : A(x)).$$

1.5 Conjuntos

Según el matemático Georg Cantor, un *conjunto* es una colección de objetos de nuestra imaginación, distintos entre sí, considerada en sí misma como un objeto. Esta definición no es muy

rigurosa, pero suficiente para nosotros. Los objetos que integran un conjunto se llaman **elementos** del conjunto. Si x es elemento del conjunto A , entonces se escribe $x \in A$. Si x no es un elemento de A , se escribe $x \notin A$. Un conjunto se caracteriza únicamente por sus elementos:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B). \quad (1.2)$$

Si $A = B$ no es correcto, entonces se escribe $A \neq B$. En general anotamos conjuntos como $A = \{\dots\}$. Existen varias formas de anotar conjuntos:

- (1) **Por extensión:** Anotando todos los elementos del conjunto, por ejemplo

$$\{1, 2, \pi, 1017\}.$$

Esta manera de anotar conjunto solo sirve para conjuntos finitos.

- (1) **Por construcción:** Anotando una *característica* que define los elementos: el conjunto

$$\{x \mid A(x)\} \text{ o también } \{x : A(x)\}$$

contiene todos los elementos que cumplen con la propiedad $A(x)$. Algunas propiedades muy básicas se escriben al principio, por ejemplo

$$\{x \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } n \text{ par}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ par}\}.$$

- (1) **Por extensión con etc.:** Anotamos un par de elementos, agregamos $\dots$, y esperamos que se entienda automáticamente lo que viene. Un ejemplo será

$$\{2, 4, 6, \dots\}.$$

Al parecer este conjunto contiene todos los números naturales pares,

$$\{2, 4, 6, \dots\} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } n \text{ par}\}.$$

Esta notación es problemática, pues el lector tiene que interpretar. Si existe la mínima duda que esta notación puede fabricar ambigüedades, entonces hay que evitarla.

De la definición de igualdad de conjuntos 1.2 concluimos que el orden al anotar un conjunto no importa, y que un elemento no puede ser elemento más que una vez (aunque se puede anotar varias veces):

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 3, 2, 1\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4\}.$$

Conjuntos pueden contener otros conjuntos como elementos:

$$\{\{1, 2\}, 3, 4\} \neq \{1, 2, 3, 4\}.$$

Un conjunto muy importante es el **conjunto vacío** $\emptyset = \{\}$ que contiene ninguna elemento. Notamos que $\{\}$ contiene ningún elemento, mientras $\{\{\}\}$ contiene exactamente un elemento (el conjunto vacío). En particular, $\{\} \neq \{\{\}\}$. Sin embargo, notamos que

$$\{\} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ par e impar}\}.$$

Podemos comparar conjuntos.

Definición 9 (Comparar conjuntos). Sean A y B conjuntos.

- (1) Se dice que A es un **subconjunto** de B , $A \subseteq B$, si cada elemento de A también es elemento de B ,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B).$$

$A \supseteq B$ significa $B \subseteq A$. Notamos que $A \in B$ y $A \subseteq B$ no es lo mismo! Por ejemplo, $a \in \{a, b\}$ y $\{b\} \subseteq \{a, b\}$ son correctos, pero $a \subseteq \{a, b\}$ y $\{b\} \in \{a, b\}$ son falsos. Notamos que $\emptyset \subseteq A$ para todo conjunto A , en particular $\emptyset \subseteq \emptyset$.

- (2) Se dice que A **no** es un subconjunto de B , $A \not\subseteq B$, si $\neg(A \subseteq B)$ es correcto, o sea

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow (\exists x : x \in A \wedge x \notin B).$$

$A \not\supseteq B$ significa $B \not\subseteq A$.

- (3) Se dice que A es un **subconjunto estricto** de B , $A \subsetneq B$, si A es subconjunto de B pero B contiene elementos adicionales, es decir

$$A \subsetneq B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B).$$

$A \supsetneq B$ significa $B \subsetneq A$.

□

Podemos combinar conjuntos para generar nuevos conjuntos.

Definición 10 (Nuevos conjuntos). Sean A y B conjuntos.

- (1) La **unión** de A y B , $A \cup B$, es el conjunto que contiene todos los elementos que son elementos de A o de B (o de los dos),

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Notamos que $A \cup B = B \cup A$. Además, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, y por lo tanto podemos escribir $A \cup B \cup C$ sin ambigüedad.

- (2) La **intersección** de A y B , $A \cap B$, es el conjunto que contiene todos los elementos que son elementos de A y también de B ,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Notamos que $A \cap B = B \cap A$. Además, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, y por lo tanto podemos escribir $A \cap B \cap C$ sin ambigüedad.

- (3) El **conjunto potencia** $\mathcal{P}(A)$ de un conjunto A es el conjunto cuyo elementos son todos los subconjuntos de A ,

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Notamos que $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

- (4) La **diferencia** de A y B , $A \setminus B$, es el conjunto de todos los elementos de A que no son elementos de B ,

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

□

También podemos tomar uniones e intersecciones de una infinita cantidad de conjuntos.

Definición 11 (Nuevos conjuntos pt. 2). Sea $\mathcal{M}$ un conjunto cuyo elementos son conjuntos.

- (1) La **unión** de $\mathcal{M}$, $\bigcup \mathcal{M}$ o también $\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A$, contiene todos los elementos que aparecen en por lo menos uno de los elementos de $\mathcal{M}$,

$$\bigcup \mathcal{M} = \{x \mid \exists A \in \mathcal{M} \wedge x \in A\}.$$

- (2) La **intersección** de $\mathcal{M}$, $\bigcap \mathcal{M}$ o también $\bigcap_{A \in \mathcal{M}} A$, contiene todos los elementos que aparecen en todos los elementos de $\mathcal{M}$,

$$\bigcap \mathcal{M} = \{x \mid \forall A : A \in \mathcal{M} \Rightarrow x \in A\}.$$

□

Definición 12 (Par ordenado, Producto cartesiano). Sean A, B dos conjuntos y $a \in A, b \in B$. El conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ se llama **par ordenado** (o 2-tupla), y se denota como (a, b) . El **producto cartesiano** $A \times B$ es el conjunto de todos los pares ordenados,

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

□

Notamos que dos pares ordenados (a, b) y (a', b') son iguales si y solo si $a = a'$ y $b = b'$, es decir, el orden importa. Por ejemplo, $(2, 7) \neq (7, 2)$ (recordamos que para conjuntos si $\{2, 7\} = \{7, 2\}$). Por inducción podemos definir también n-tuplas $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ y productos $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Usaremos la notación $\prod_{j=1}^n A_j = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

Ejemplo 13. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4, 5\}$. Entonces $A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$.

1.6 Relaciones y funciones

Definición 14 (Relación). Sean A, B conjuntos. Un subconjunto $R \subseteq A \times B$ se llama **relación** (entre A y B). Si $(a, b) \in R$, entonces se dice que a y b están relacionados, y se escribe aRb .

Ejemplo 15. Sea $A = B = \mathbb{N}$, y definimos la relación $\leq$ por

$$\leq = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b\}.$$

Definición 16. Sea A un conjunto. Una relación $R \subseteq A \times A$ se llama **relación de equivalencia**, si y solo si cumple con las tres siguientes propiedades:

- (i) $\forall a \in A : aRa$ (reflexividad),
- (ii) $\forall a, b \in A : aRb \Rightarrow bRa$ (simetría),
- (iii) $\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ (transitividad).

Ejemplo 17. Sea A un conjunto.

- (i) La “igualdad” $R = \{(a, a) \mid a \in A\}$ es una relación de equivalencia.
- (ii) La relación “todo” $R = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$ es una relación de equivalencia.

Definición 18 (Función). Sean A, B conjuntos no vacíos. Sea R_f una relación entre A y B tal que para cada $a \in A$ existe único $b \in B$ tal que aR_fb , es decir

$$\forall a \in A : \exists! b \in B : aR_fb.$$

Entonces R_f se llama **función** de A a B , y usaremos la notación $f : A \rightarrow B$. En vez de aR_fb se escribe $b = f(a)$ ¹. El conjunto de partida A se llama **dominio**, y el conjunto de llegada B se llama **codominio**. El conjunto $\{f(a) \mid a \in A\}$ se llama **imagen** de f . Si $C \subseteq A$, entonces $f(C) = \{f(a) \mid a \in C\}$ se llama imagen de C bajo f . Si $D \subseteq B$, entonces $f^{-1}(D) = \{a \in A \mid f(a) \in D\}$ se llama **imagen inversa** de D bajo f .

Ejemplo 19. Una función muy importante es la **identidad**: Sea A un conjunto no vacío y definimos $\text{id}_A : A \rightarrow A$ por $\text{id}(a) = a$.

Definición 20. Sean A, B conjuntos no vacíos y $f : A \rightarrow B$ una función. La función f se llama

- (i) **inyectiva**, si para cada $b \in B$ existe no más de un $a \in A$ con $b = f(a)$. En otras palabras,

$$\forall a \in A : \forall a' \in A : (f(a) = f(a') \Rightarrow a = a').$$

- (ii) **sobreyectiva**, si para cada $b \in B$ existe un $a \in A$ con $b = f(a)$. En otras palabras,

$$\forall b \in B : \exists a \in A : b = f(a).$$

¹Dado que para cada $a \in A$ existe único $b \in B$ tal que aR_fb , esta notación no es ambigua.

(iii) **biyectiva**, si para cada $b \in B$ existe único $a \in A$ con $b = f(a)$. En otras palabras,

$$\forall b \in B : \exists! a \in A : b = f(a).$$

Lema 21. Sean A, B conjuntos no vacíos y $f : A \rightarrow B$ una función. Entonces f es biyectiva si y solo si es inyectiva y sobreyectiva.

Proof. Hagamos la demostración en dos partes.

biyectiva $\Rightarrow$ inyectiva y sobreyectiva: Sea $f : A \rightarrow B$ biyectiva, es decir

$$\forall b \in B : \exists! a \in A : b = f(a).$$

Según la tautología (5) en Sección 1.4, obtenemos

$$\forall b \in B : \exists a \in A : b = f(a),$$

lo que muestra que $f : A \rightarrow B$ es sobreyectiva. Ahora mostramos que f es inyectiva. Recordamos de la Sección 1.4 que

$$[\exists! a \in A : b = f(a)] \Leftrightarrow [(\exists a \in A : b = f(a)) \wedge (\forall a, a' \in A : b = f(a) \wedge b = f(a') \Rightarrow a = a')].$$

Eliminando la conjunción, obtenemos

$$[\exists! a \in A : b = f(a)] \Rightarrow [\forall a, a' \in A : b = f(a) \wedge b = f(a') \Rightarrow a = a'].$$

De la biyectividad de $f : A \rightarrow B$ obtenemos

$$\forall b \in B : \forall a, a' \in A : (b = f(a) \wedge b = f(a') \Rightarrow a = a').$$

Intercambiando los cuantificadores universales obtenemos

$$\forall a, a' \in A : \forall b \in B : (b = f(a) \wedge b = f(a') \Rightarrow a = a').$$

Sean $a, a' \in A$ cualesquiera pero fijos, entonces

$$\forall b \in B : (b = f(a) \wedge b = f(a') \Rightarrow a = a'),$$

y dado que $f : A \rightarrow B$ es una función, podemos elegir $b = f(a)$ y obtenemos

$$f(a) = f(a) \wedge f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'.$$

Dado que siempre $f(a) = f(a)$, queda

$$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'.$$

Dado que $a, a' \in A$ cualesquiera, obtenemos

$$\forall a \in A : \forall a' \in A : (f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'),$$

lo que es la definición de inyectividad de $f : A \rightarrow B$.

inyectiva y sobreyectiva $\Rightarrow$ biyectiva: Sea $b \in B$ cualquiera pero fijo. Dado que $f : A \rightarrow B$ es inyectiva,

$$\forall a \in A : \forall a' \in A : (f(a) = f(a') \Rightarrow a = a')$$

Notamos que $[b = f(a) \wedge b = f(a')] \Rightarrow f(a) = f(a')$, y por lo tanto

$$\forall a \in A : \forall a' \in A : (b = f(a) \wedge b = f(a') \Rightarrow a = a').$$

Combinamos esta última proposición con la sobreyectividad de $f : A \rightarrow B$, obtenemos

$$(\exists a \in A : b = f(a)) \wedge (\forall a \in A : \forall a' \in A : (b = f(a) \wedge b = f(a') \Rightarrow a = a')),$$

lo que significa por definición que $\exists! a \in A : b = f(a)$. Dado que $b \in B$ cualquiera, obtenemos

$$\forall b \in B : \exists! a \in A : b = f(a),$$

o sea $f : A \rightarrow B$ biyectiva. □

Definición 22. Sean A, B, C conjuntos no vacíos y $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ funciones. Entonces se define la combinación $g \circ f : A \rightarrow C$ por $(g \circ f)(a) = g(f(a))$

¡Cuidado! Para hacer esta definición deberíamos primero verificar que realmente define una función $g \circ f : A \rightarrow C$: Para cada $a \in A$, existe único $b \in B$ con $b = f(a)$. Para cada $b \in B$, existe única $c \in C$ tal que $c = g(b)$. En particular, para cada $a \in A$ existe único $c \in C$ tal que $c = g(f(a))$.

Notamos que en la notación $g \circ f$, *primero* se aplica la función f y *después* se aplica la función g . Relaciones son conjuntos, y por lo tanto dos relaciones R_1 y R_2 entre A y B son iguales si son iguales como conjuntos. Si R_f y R_g son funciones de A a B , entonces su igualdad se puede caracterizar como

$$f = g \Leftrightarrow \forall a \in A : f(a) = g(a). \quad (1.3)$$

Proposición 23. Sean A, B, C, D conjuntos no vacíos y $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ y $h : C \rightarrow D$ funciones.

(i) La combinación es asociativa, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

(ii) Se tiene $\text{id}_B \circ f = f$ y $g \circ \text{id}_B = g$.

(iii) Si f y g ambas son inyectivas/sobreyectivas/biyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva/sobreyectiva/biyectiva.

Proof. Para mostrar el punto (i), según (1.3) es suficiente verificar

$$\forall a \in A : [(h \circ g) \circ f](a) = [h \circ (g \circ f)](a).$$

Sea $a \in A$. Aplicamos la definición de combinación de funciones para ver

$$[(h \circ g) \circ f](a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))) = h(g \circ f(a)) = [h \circ (g \circ f)](a).$$

Para verificar (ii), sea $a \in A$. Notamos $f(a) \in B$, y por lo tanto $\text{id}_B(f(a)) = f(a)$. Ahora mostraremos (iii) en el caso de que f y g sean inyectivas. El objetivo es mostrar que $g \circ f$ es inyectiva, es decir

$$\forall a \in A : \forall a' \in A : g \circ f(a) = g \circ f(a') \Rightarrow a = a'.$$

Sean entonces $a, a' \in A$ y $g \circ f(a) = g \circ f(a')$. Dado que g es inyectiva, concluimos $f(a) = f(a')$. Dado que f es inyectiva, concluimos $a = a'$. Finalmente, mostraremos (iii) en el caso de que f y g sean sobreyectivas. El objetivo es mostrar que $g \circ f$ es sobreyectiva, es decir,

$$\forall c \in C : \exists a \in A : c = g \circ f(a).$$

Sea $c \in C$. Dado que $g : B \rightarrow C$ es sobreyectiva, existe $b \in B$ con $c = g(b)$. Dado que f es sobreyectiva, existe $a \in A$ con $b = f(a)$. Vemos que $c = g(f(a))$. $\square$

Definición 24. Sean A, B conjuntos no vacíos y $f : A \rightarrow B$ una función. Una función $g : B \rightarrow A$ se llama

(i) *inversa por la izquierda* de f , si $g \circ f = \text{id}_A$.

(ii) *inversa por la derecha* de f , si $f \circ g = \text{id}_B$.

(iii) *inversa*, si es inversa por la izquierda y por la derecha.

Lema 25. Sean A, B conjuntos no vacíos y $f : A \rightarrow B$ una función. Sea $g_i : B \rightarrow A$ una izquierda por la izquierda, y $g_d : B \rightarrow A$ una izquierda por la derecha. Entonces $g_i = g_d$, y esta función es una inversa de f .

Proof. Mostramos primero que $g_i = g_d$:

$$g_i \stackrel{1}{=} g_i \circ \text{id}_B \stackrel{2}{=} g_i \circ (f \circ g_d) \stackrel{3}{=} (g_i \circ f) \circ g_d \stackrel{4}{=} \text{id}_A \circ g_d \stackrel{5}{=} g_d.$$

donde usamos Proposición 23, (ii) en 1, que g_d es inversa por la derecha en 2, la asociatividad de la combinación en Proposición 23, (i), en 3, que g_i es inversa por la izquierda en 4, y otra vez Proposición 23, (ii) en 5. Dado que $g_i = g_d$, obtenemos que es inversa. $\square$

Corolario 26. Sean A, B conjuntos no vacíos y $f : A \rightarrow B$ una función. Entonces f tiene a lo mas una inversa.

Proof. Sean g_1 y g_2 inversas de f . En particular, g_1 es inversa por la izquierda, y g_2 es inversa por la derecha. Según Lema 25, $g_1 = g_2$. $\square$

Comentario 27. *La inversa por la izquierda (o por la derecha) en general no es única.*

Mas adelante demostraremos el siguiente resultado:

Lema 28. *Sean A, B conjuntos no vacios y $f : A \rightarrow B$ una función.*

- (i) La función f es inyectiva si y solo si tiene una inversa por la izquierda.*
- (ii) La función f es sobreyectiva si y solo si tiene una inversa por la derecha.*
- (iii) La función f es biyectiva si y solo si tiene una inversa.*

Chapter 2

Espacios vectoriales

Siempre $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ y $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$.

2.1 Preliminares algebraicos

Definición 29 (Operación binaria, estructura algebraica). Sean A, B conjuntos no vacíos. Una función $\circ : A \times B \rightarrow B$ se llama **operación binaria** (sobre A y B). Si $A = B$, entonces el par $(A, \circ)$ se llama **estructura algebraica**.

Si $\circ$ es una operación binaria y $a \in A, b \in B$, entonces escribiremos $a \circ b$ en vez de $\circ(a, b)$.

Definición 30 (Leyes algebraicas). Sea $(A, \circ)$ una estructura algebraica, entonces se definen las siguientes leyes algebraicas.

(i) **Asociatividad:**

$$\forall a, b, c \in A : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

(ii) **Existencia de elemento neutro:**

$$\exists e \in A \forall a \in A : e \circ a = a \circ e = a.$$

(iii) **Existencia de elementos inversos:**

$$\forall a \in A \exists a' \in A : a \circ a' = a' \circ a = e,$$

donde e es el elemento neutro del punto anterior.

(iv) **Conmutatividad:**

$$\forall a, b \in A : a \circ b = b \circ a.$$

Si $\circ = +$ es una suma, entonces el elemento neutro se denomina usualmente con el simbolo 0, mientras el elemento inverso de a se denomina $-a$. Si $\circ = \cdot$ es un producto, entonces el elemento neutro se denomina usualmente con el simbolo 1, mientras el elemento inverso de a se denomina a^{-1} o también $\frac{1}{a}$.

Teorema 31. *Sea $(A, \circ)$ una estructura algebraica. Si existe un elemento neutro, entonces es único. Además, si para $a \in A$ existe un elemento inverso, entonces es único.*

Proof. Sean e_1, e_2 elementos neutros, entonces $e_1 = e_1 \circ e_2$, pues e_2 es neutro. Por otro lado, $e_2 = e_1 \circ e_2$, pues e_1 es neutro. Por lo tanto, $e_1 = e_2$. $\square$

Definición 32. *Una $(A, \circ)$ estructura algebraica se llama **grupo**, si cumple con (i), (ii), y (iii). Si además cumple con (iv), entonces se llama **grupo conmutativo** (o grupo abeliano).*

Notamos que el conjunto vacío $\emptyset$ no es un grupo. Aunque si se cumple (i) y (iii), no se cumple (ii) (existencia de elemento neutro).

Ejemplo 33 (Grupos). • $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano.

- $(\mathbb{N}, +)$ no es un grupo, pues no hay elemento neutro.
- $(\mathbb{N}_0, +)$ no es un grupo. Hay elemento neutro, pero no hay elementos inversos.
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ no es un grupo. Hay elemento neutro, pero todos los $z \in \{1, -1\}$ no tienen elementos inversos.

Definición 34. *Sea A un conjunto no vacío y $\oplus, \odot$ dos operaciones binarias sobre A . Si $(A, \oplus)$ es un grupo conmutativo con elemento neutro 0 y $(A \setminus \{0\}, \odot)$ es un grupo conmutativo, y además se tiene*

(v) **Distributividad:**

$$\forall a, b, c \in A : a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c) \quad \text{y} \quad (a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c),$$

entonces $(A, \oplus, \odot)$ se llama **cuerpo**.

Ejemplo 35 (Cuerpos). $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ son cuerpos. Es decir, la aritmética clásica que conocemos en los números racionales, reales, y complejos cumplen con las leyes aritméticas que caracterizan un cuerpo.

Para representar vectores en mas dimensiones, necesitaremos productos de grupos. Por ejemplo, si $(A, \circ_A)$ y $(B, \circ_B)$ son grupos, entonces el producto cartesiano $A \times B$ naturalmente se puede transformar en un grupo con la operación binaria $\circ : (A \times B) \times (A \times B) \rightarrow A \times B$ definida por

$$(a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) := (a_1 \circ_A a_2, b_1 \circ_B b_2).$$

Lema 36. Sean $(A_j, \circ_j)$ grupos para $1 \leq j \leq n \in \mathbb{N}$. Entonces el producto cartesiano $\prod_{j=1}^n A_j$ con la operación $\circ$ definida por

$$(a_1, \dots, a_n) \circ (b_1, \dots, b_n) := (a_1 \circ_1 b_1, \dots, a_n \circ_n b_n)$$

es un grupo. Este grupo es conmutativo si y solo si todos los grupos $(A_j, \circ_j)$ son conmutativos. El elemento neutro en $\prod_{j=1}^n A_j$ es $(e_1, \dots, e_n)$, donde e_j es el neutro en A_j , y el inverso de $(a_1, \dots, a_n)$ es $(a'_1, \dots, a'_n)$, donde a'_j es el inverso de a_j .

Proof. Verificamos solamente la asociatividad, las otras leyes algebraicas se verifican de la misma manera. Sean $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n), (c_1, \dots, c_n) \in \prod_{j=1}^n A_j$, entonces

$$\begin{aligned} ((a_1, \dots, a_n) \circ (b_1, \dots, b_n)) \circ (c_1, \dots, c_n) &= (a_1 \circ_1 b_1, \dots, a_n \circ_n b_n) \circ (c_1, \dots, c_n) \\ &= ((a_1 \circ_1 b_1) \circ_1 c_1, \dots, (a_n \circ_n b_n) \circ_n c_n) \\ &= (a_1 \circ_1 (b_1 \circ_1 c_1), \dots, a_n \circ_n (b_n \circ_n c_n)) \\ &= (a_1, \dots, a_n) \circ (b_1 \circ_1 c_1, \dots, b_n \circ_n c_n) \\ &= (a_1, \dots, a_n) \circ ((b_1, \dots, b_n) \circ (c_1, \dots, c_n)), \end{aligned}$$

donde en la primera, segunda, última y penúltima y última identidad usamos la definición de $\circ$, y en la tercera identidad usamos la asociatividad de cada grupo $(A_j, \circ_j)$. $\square$

Lema 37. Sea $(A, \circ)$ un grupo. Sea $a \in A$ con $a = a \circ a$. Entonces $a = e$.

Proof. Sea $a \in A$ con $a = a \circ a$. Sea a' el inverso de a , entonces

$$e = a \circ a' = (a \circ a) \circ a' = a \circ (a \circ a') = a \circ e = a.$$

$\square$

2.2 Espacios vectoriales

Para levantar un concepto adecuado de *vectores* $\mathbf{v}$ en un espacio vectorial $\mathbf{V}$, usaremos la intuición que tenemos de *fuerza* o *velocidad*:

Vectores se pueden sumar, y la suma no depende del orden en que se suma.

Para considerar el punto (1), vamos a pedir entonces que $(\mathbf{V}, \pm)$ sea un grupo conmutativo, donde $\pm$ denota la suma de vectores.

Además, queremos resolver sistemas lineales. Por ejemplo, si tenemos fuerzas en el plano

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

entonces queremos saber como combinar $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ para generar $\mathbf{x}$. Es decir, buscamos *números* α, β tal que $\alpha\mathbf{u} \pm \beta\mathbf{v} = \mathbf{x}$, en otras palabras

$$\alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \pm \beta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Si $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$ entonces existe única solución dada por

$$\alpha = \frac{v_2x_1 - v_1x_2}{u_1v_2 - u_2v_1}$$

$$\beta = \frac{-u_2x_1 + u_1x_2}{u_1v_2 - u_2v_1}.$$

Concluimos que para calcular α y β , tenemos que sumar y multiplicar - por lo tanto, vamos a pedir que los *números* sean elementos de un cuerpo $(K, +, \cdot)$. Es comun usar la palabra *escalar* en vez de *número*. También necesitaremos una operación que realiza el producto de un escalar con un vector, $\alpha \odot \mathbf{u}$ (es la operación que arriba hemos anotado simplemente como $\alpha\mathbf{u}$).

Definición 38 (Espacio vectorial). Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo y $(\mathbf{V}, \oplus)$ un grupo conmutativo. Sea $\odot : K \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ una operación binaria. Se dice que $(\mathbf{V}, \oplus)$ es un **espacio vectorial** sobre $(K, +, \cdot)$, si

- (i) $\alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = (\alpha \odot \mathbf{u}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{v})$
- (ii) $(\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} = (\alpha \odot \mathbf{u}) \oplus (\beta \odot \mathbf{u})$
- (iii) $(\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{u} = \alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u})$
- (iv) $1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

para todo $\alpha, \beta \in K$ y $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, donde 0 es el elemento neutro de $(K, +)$ y 1 es el elemento neutro de $(K \setminus \{0\}, \cdot)$. $\square$

En la última definición hay *cuatro* operaciones aritmeticas diferentes: la suma de escalares $+$, el producto de escalares $\cdot$, la suma de vectores $\oplus$, y el producto de escalar con vector $\odot$. El producto de un escalar α con un vector $\mathbf{v}$ muchas veces lo anotamos sin símbolo, $\alpha\mathbf{v}$. A partir de los elementos que se están combinando sabremos a cual operación se refiere. El elemento neutro de $(\mathbf{V}, \oplus)$ se denota por $\mathbf{0}$, y el elemento neutro de $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ se denota por $-\mathbf{v}$, es decir $\mathbf{v} \oplus (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. El elemento neutro de $\alpha \in K$ lo denotamos por $-\alpha$, es decir, $\alpha + (-\alpha) = 0$.

Teorema 39 (Propiedades aritmeticas en espacios vectoriales). Sea $(\mathbf{V}, \oplus)$ es un espacio vectorial sobre $(K, +, \cdot)$. Entonces para todo $\alpha \in K$ y $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ se tiene lo siguiente.

- (i) $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$,
- (ii) $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$,
- (iii) $(-\alpha)\mathbf{v} = \alpha(-\mathbf{v}) = -(\alpha\mathbf{v})$,

$$(iv) \alpha \mathbf{v} = \mathbf{0} \implies \alpha = 0 \vee \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Proof. Para verificar (i), notamos

$$\alpha \mathbf{0} = \alpha (\mathbf{0} \oplus \mathbf{0}) = \alpha \mathbf{0} \oplus \alpha \mathbf{0},$$

donde usamos que $\mathbf{0}$ es el neutro en $(\mathbf{V}, \oplus)$ y la definición de espacio vectorial. Según Lema 37, $\alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Para verificar (ii), notamos

$$0\mathbf{v} = (0 + 0)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v},$$

donde usamos que 0 es el neutro en $(K, +)$ y la distributividad. Según Lema 37, $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$. $\square$

2.3 Ejemplos de espacios vectoriales

El espacio de coordenadas

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $(K, +, \cdot)$ un cuerpo (por ejemplo, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). En particular, $(K, +)$ es un grupo conmutativo y, por el Lemma 36, el producto cartesiano

$$K^n = \prod_{j=1}^n K = \{(u_1, \dots, u_n) \mid u_j \in K \text{ para todo } j = 1, \dots, n\}$$

es un grupo conmutativo con la suma

$$(u_1, \dots, u_n) \oplus (v_1, \dots, v_n) := (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n). \quad (2.1)$$

Definimos además el producto $\odot : K \times K^n \rightarrow K^n$ por

$$\alpha \odot (u_1, \dots, u_n) := (\alpha \cdot u_1, \dots, \alpha \cdot u_n). \quad (2.2)$$

Entonces, $(K^n, \oplus)$ es un espacio vectorial sobre $(K, +, \cdot)$, se le dice **espacio de coordenadas** K^n .

Verifiquemos que se cumple la propiedad (i) de la Definición 38: Sea $\alpha \in K$ y $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in K^n$. Vemos que

$$\begin{aligned} \alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \alpha \odot (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \stackrel{\textcircled{2}}{=} (\alpha \cdot (u_1 + v_1), \dots, \alpha \cdot (u_n + v_n)) \\ &\stackrel{\textcircled{3}}{=} (\alpha u_1 + \alpha v_1, \dots, \alpha u_n + \alpha v_n) \stackrel{\textcircled{1}}{=} (\alpha u_1, \dots, \alpha u_n) \oplus (\alpha v_1, \dots, \alpha v_n) \\ &\stackrel{\textcircled{2}}{=} (\alpha \odot (u_1, \dots, u_n)) \oplus (\alpha \odot (v_1, \dots, v_n)) = (\alpha \odot \mathbf{u}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{v}) \end{aligned}$$

donde en $\textcircled{1}$ usamos la definición de la suma (2.1), en $\textcircled{2}$ usamos la definición del producto (2.2), y en $\textcircled{3}$ usamos la distributividad del cuerpo $(K, +, \cdot)$ de Definición 34.

Ejemplo particulares son $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$.

El espacio de las matrices

Sea $n, m \in \mathbb{N}$ y $(K, +, \cdot)$ un cuerpo (por ejemplo, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Sea $K^{m \times n}$ el conjunto de las matrices con m filas y n columnas

$$K^{m \times n} = \left\{ \begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m,1} & \cdots & u_{m,n} \end{pmatrix} \mid u_{j,k} \in K \text{ para todo } j = 1, \dots, m \text{ y } k = 1, \dots, n \right\}.$$

Con la suma

$$\begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m,1} & \cdots & u_{m,n} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m,1} & \cdots & v_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,1} + v_{1,1} & \cdots & u_{1,n} + v_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m,1} + v_{m,1} & \cdots & u_{m,n} + v_{m,n} \end{pmatrix}$$

y el producto

$$\alpha \odot \begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m,1} & \cdots & u_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_{1,1} & \cdots & \alpha u_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha u_{m,1} & \cdots & \alpha u_{m,n} \end{pmatrix},$$

el conjunto $K^{m \times n}$ es un espacio vectorial sobre $(K, +, \cdot)$.

El espacio de las funciones

Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo (por ejemplo, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), y M un conjunto no vacío. Definimos el conjunto de todas las funciones de M a K , $K^M = \{f \mid f : M \rightarrow K\}$. Con la suma

$$f \oplus g : \begin{cases} M \rightarrow K \\ m \mapsto f(m) + g(m), \end{cases}$$

y el producto

$$\alpha \odot f : \begin{cases} M \rightarrow K \\ m \mapsto \alpha \cdot f(m), \end{cases}$$

el conjunto K^M es un espacio vectorial sobre $(K, +, \cdot)$.

Comentario 40. El espacio K^n es un caso especial de $K^{m \times n}$ para $m = 1$, y también es un caso especial del último ejemplo para $M = \{1, \dots, n\}$, es decir, $K^n = K^{\{1, \dots, n\}}$.

2.4 Subespacios

Un espacio vectorial $\mathbf{V}$ sobre K es, entonces, un conjunto que nos permite sumar elementos y multiplicarlos con escalares de K sin salir de $\mathbf{V}$ mismo, es decir, $\mathbf{V}$ es *cerrado* bajo la aritmética que se define. Probablemente existen subconjuntos de $\mathbf{V}$ que son cerrados bajo la aritmética. Estos subconjuntos son espacios vectoriales por si mismo.

Definición 41. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K y $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$. Si $\mathbf{U}$, con la aritmética de $\mathbf{V}$, por si mismo es un espacio vectorial sobre K , entonces se dice que $\mathbf{U}$ es un **subespacio**, $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$.

El siguiente resultado nos permite verificar facilmente si un subconjunto es realmente un subespacio.

Teorema 42. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K y $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$. Entonces, $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$ si y solo si se cumplen las tres condiciones siguientes,

- (i) $\mathbf{0} \in \mathbf{U}$,
- (ii) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{U} : \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \in \mathbf{U}$,
- (iii) $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{U} : \forall \alpha \in K : \alpha \mathbf{u} \in \mathbf{U}$.

Proof. Si $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$, entonces las tres condiciones se cumplen por definición. Mostramos ahora que las tres condiciones implican que $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$. Primero verificamos que $(\mathbf{U}, \oplus)$ es un grupo conmutativo: La condición (ii) implica que $(\mathbf{U}, \oplus)$ es una estructura algebraica, es decir, cerrada bajo la suma. La condición (i) asegura que existe el elemento neutro. Asociatividad y conmutatividad se transmiten por herencia de $\mathbf{V}$ a $\mathbf{U}$. Falta demostrar que existen elementos inversos. Sea $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$. Por la propiedad (iii) obtenemos $(-1)\mathbf{u} \in \mathbf{U}$. Vemos

$$(-1)\mathbf{u} = -(1\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$$

donde usamos (iii) del Teorema 39 para la primera identidad, y (iv) de la Definición 38 para la segunda. Concluimos $-\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, o sea existencia de elementos inversos. Es decir, $(\mathbf{U}, \oplus)$ es un grupo conmutativo. Además, $\odot : K \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$ por la condición (iii). Los puntos (i)–(iv) de la Definición 38 se transmiten por herencia de $\mathbf{V}$ a $\mathbf{U}$. $\square$

Para verificar entonces si $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$, tenemos que verificar las tres condiciones del último resultado.

Ejemplo 43 (Subespacios triviales). Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K y $\mathbf{0}$ el elemento neutro de $\oplus$.

- (i) $\mathbf{U}$ es subespacio de $\mathbf{U}$.
- (ii) $\{\mathbf{0}\}$ es subespacio de $\mathbf{U}$.

Ejemplo 44. Sea $\mathbb{R}^3$ el espacio de coordenadas.

- (i) El plano horizontal $\{(u_1, u_2, 0) \mid u_1, u_2 \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
- (ii) El plano $\{(u_1, u_2, u_3) \mid u_1 + 3u_2 = 4u_3\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
- (iii) El plano $\{(u_1, u_2, u_3) \mid u_1 + 3u_2 = 4u_3 + 1\}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

2.4.1 Intersecciones de subespacios

La intersección $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2$ de subespacios de $\mathbf{V}$ es un subespacio. De hecho, tenemos lo siguiente.

Teorema 45. *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K . Sea $\mathcal{M}$ un conjunto no vacío de subespacios de $\mathbf{V}$. Entonces*

$$\bigcap \mathcal{M} \leq \mathbf{V}.$$

Además, $\bigcap \mathcal{M}$ es el subespacio más grande contenido en todos los $\mathbf{U} \in \mathcal{M}$, es decir

$$(\mathbf{W} \leq \mathbf{V} \text{ tal que } \forall \mathbf{U} \in \mathcal{M} : \mathbf{W} \subset \mathbf{U}) \Rightarrow \mathbf{W} \subset \bigcap \mathcal{M}.$$

Proof. tbc. □

Para un subconjunto $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}$, podemos intentar de encontrar el subespacio más pequeño de $\mathbf{V}$ que contiene $\mathbf{A}$.

Definición 46. *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K . Si $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}$ y*

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{U} \mid \mathbf{A} \subset \mathbf{U} \leq \mathbf{V}\}$$

es el conjunto de todos los subespacios de $\mathbf{V}$ que contienen $\mathbf{A}$, entonces el subespacio

$$[\mathbf{A}] := \bigcap \mathcal{M}$$

*se llama el **espacio generado**. Si $[\mathbf{A}] = \mathbf{V}$, entonces $\mathbf{A}$ se llama **sistema generador** de $\mathbf{V}$.* □

Notamos que si $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$ es un subespacio que contiene $\mathbf{A}$, es decir $\mathbf{A} \subset \mathbf{U}$, entonces por definición de $[\mathbf{A}]$ se tiene $[\mathbf{A}] \subset \mathbf{U}$, así que efectivamente $[\mathbf{A}]$ es el subespacio más pequeño que contiene $\mathbf{A}$.

Definición 47. *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K y $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbf{V}$. El vector $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ se llama **combinación lineal** de $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbf{V}$, si existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tal que*

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n \mathbf{u}_n.$$

*Los $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ se llaman **coeficientes**. Si $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}$, entonces el conjunto*

$$\text{span}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \text{ es combinación lineal de elementos de } \mathbf{A}\}$$

*se llama el **span** de $\mathbf{A}$.* □

A partir de ahora vamos a usar la notación de sumas,

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n \mathbf{u}_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j.$$

Teorema 48. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K y $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}$ un conjunto no vacío. Entonces

$$(i) \quad \mathbf{A} \subset \text{span}(\mathbf{A}) \leq \mathbf{V},$$

$$(ii) \quad \text{Si } \mathbf{U} \leq \mathbf{V} \text{ con } \mathbf{A} \subset \mathbf{U}, \text{ entonces } \text{span}(\mathbf{A}) \subset \mathbf{U}.$$

Proof. Para mostrar (i), verificamos primero que $\mathbf{A} \subset \text{span}(\mathbf{A})$. Sea $\mathbf{u} \in \mathbf{A}$, entonces por Definición 38, (iv), $\mathbf{u} = 1\mathbf{u}$, y por lo tanto $\mathbf{u}$ es una combinación lineal de elementos de $\mathbf{A}$ (de $\mathbf{u}$ mismo, de hecho), así que $\mathbf{u} \in \text{span}(\mathbf{A})$. Para verificar $\text{span}(\mathbf{A}) \leq \mathbf{V}$, mostramos los puntos (i) – (iii) de Teorema 42 para $\text{span}(\mathbf{A})$.

- (i) de Teorema 42: Dado que $\mathbf{A}$ no es vacío, existe $\mathbf{u} \in \mathbf{A}$. Por ser una combinación lineal, $0\mathbf{u} \in \text{span}(\mathbf{A})$, y por Teorema 39 (ii), $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Concluimos $\mathbf{0} \in \text{span}(\mathbf{A})$.
- (ii) de Teorema 42: Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{span}(\mathbf{A})$, es decir,

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \sum_{k=1}^m \beta_k \mathbf{v}_k,$$

con $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbf{A}$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in K$. Por lo tanto,

$$\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j \oplus \sum_{k=1}^m \beta_k \mathbf{v}_k \in \text{span}(\mathbf{A}).$$

- (iii) de Teorema 42: Sea $\mathbf{u} \in \text{span}(\mathbf{A})$ y $\alpha \in K$. tbc.

Para mostrar (ii), sea $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$ con $\mathbf{A} \subset \mathbf{U}$. tbc □

Corolario 49. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K y $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}$ un conjunto no vacío. Entonces $[\mathbf{A}] = \text{span}(\mathbf{A})$.

Proof. Recordamos que $[\mathbf{A}] = \bigcap \{\mathbf{U} \mid \mathbf{A} \subset \mathbf{U} \leq \mathbf{V}\}$. Según Teorema 48 (i), $\mathbf{A} \subset \text{span}(\mathbf{A}) \leq \mathbf{V}$, y por lo tanto

$$[\mathbf{A}] = \bigcap \{\mathbf{U} \mid \mathbf{A} \subset \mathbf{U} \leq \mathbf{V}\} \subset \text{span}(\mathbf{A}).$$

Por otro lado, sea $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$ con $\mathbf{A} \subset \mathbf{U}$. Según Teorema 48 (ii), $\text{span}(\mathbf{A}) \subset \mathbf{U}$, por lo tanto

$$[\mathbf{A}] = \bigcap \{\mathbf{U} \mid \mathbf{A} \subset \mathbf{U} \leq \mathbf{V}\} \supset \bigcap \{\text{span}(\mathbf{A}) \mid \mathbf{A} \subset \mathbf{U} \leq \mathbf{V}\} = \text{span}(\mathbf{A}).$$

□

2.4.2 Uniones y sumas de subespacios

Para dos subespacios $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2 \leq \mathbf{V}$ podemos definir la suma

$$\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 := \{\mathbf{u}_1 \oplus \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_1 \in \mathbf{U}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{U}_2\},$$

y es fácil ver que $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$ es un subespacio.

Teorema 50. *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K . Sea $\mathcal{M}$ un conjunto de subespacios de $\mathbf{V}$. Definimos*

$$\sum_{\mathbf{U} \in \mathcal{M}} \mathbf{U} := \{\mathbf{u} \in \mathbf{V} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n \mathbf{u}_n \text{ con } \mathbf{u}_j \in \mathbf{U}_j \in \mathcal{M}\}.$$

Entonces $\sum_{\mathbf{U} \in \mathcal{M}} \mathbf{U} \leq \mathbf{V}$, y se llama **la suma** de todos los $\mathbf{U} \in \mathcal{M}$. Si se cumple

$$\forall \mathbf{W} \in \mathcal{M} : \left(\sum_{\mathbf{U} \in \mathcal{M} \setminus \{\mathbf{W}\}} \mathbf{U} \right) \cap \mathbf{W} = \{\mathbf{0}\},$$

entonces se dice que $\sum_{\mathbf{U} \in \mathcal{M}} \mathbf{U}$ es **la suma directa**, y se escribe

$$\bigoplus_{\mathbf{U} \in \mathcal{M}} \mathbf{U} := \sum_{\mathbf{U} \in \mathcal{M}} \mathbf{U}.$$

Proof. tbc. □

Por otro lado, la unión $\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2$ de dos subespacios de $\mathbf{V}$ no es un subespacio en general: $\mathbf{U}_1 := \{(u_1, 0, 0) \mid u_1 \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^3$, $\mathbf{U}_2 := \{(0, u_2, 0) \mid u_2 \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^3$, pero $\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2$ no es subespacio, pues no es cerrado bajo la suma. Tenemos el siguiente resultado.

Corolario 51. *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K . Sea $\mathcal{M}$ un conjunto de subespacios de $\mathbf{V}$. Entonces*

$$\sum_{\mathbf{U} \in \mathcal{M}} \mathbf{U} = \left[\bigcup \mathcal{M} \right],$$

en particular, $\sum_{\mathbf{U} \in \mathcal{M}} \mathbf{U}$ es el subespacio mas pequeño que contiene todos los $\mathbf{U} \in \mathcal{M}$.

Proof. tbc. □

2.5 Bases y Dimension

Definición 52. *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K , $n \in \mathbb{N}$. Vectores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbf{V}$ se llaman **linealmente independientes** (sobre K), si y solo si*

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 \oplus \alpha_2 \mathbf{u}_2 \oplus \cdots \oplus \alpha_n \mathbf{u}_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Un subconjunto $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}$ se llama **linealmente independiente**, si cada combinación finita de elementos mutuamente distintos $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbf{A}$ es linealmente independiente. En el caso contrario, se dice **linealmente dependiente**.

Notamos que

$$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \text{ linealmente independiente} \Leftrightarrow \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \text{ linealmente independiente.}$$

Ejemplo 53. • *Los vectores*

$$(1, 3, -4, 2), (2, 2, -4, 0), (1, -3, 2, -4), (-1, 0, 1, 0)$$

son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^4$. Efectivamente, el sistema lineal

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tiene la solución no trivial $\alpha_1 = 4, \alpha_2 = -3, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = 0$.

• *Las matrices*

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 6 & -2 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 & 11 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes, pues

$$5 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 6 & -2 & -7 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} -2 & 3 & 11 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

El conjunto vacío $\emptyset$ es linealmente independiente, pues no contiene elementos. Un vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ es linealmente independiente. El vector $\mathbf{0}$ es linealmente dependiente, y $\mathbf{V}$ es linealmente dependiente.

Corolario 54 (Unicidad de combinaciones lineales). Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K .

- (i) Si $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ son linealmente independientes y $\mathbf{u}$ es una combinación lineal, $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j$, entonces los α_j son únicos.
- (ii) Sea $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}$ un subconjunto linealmente independiente y $\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{v}_j$ dos combinaciones lineales con $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ y $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ mutuamente distintos. Entonces

$$\begin{aligned} \alpha_\ell &= \beta_k \text{ siempre que } \mathbf{u}_\ell = \mathbf{v}_k, \\ \alpha_\ell &= 0 \text{ o } \beta_k = 0 \text{ en el caso contrario.} \end{aligned}$$

Proof. Para demostrar (i), supongamos que $\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{u}_j$. Entonces $\sum_{j=1}^n (\alpha_j - \beta_j) \mathbf{u}_j = \mathbf{0}$, y por la independencia lineal concluimos que $\alpha_j - \beta_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$.

Para demostrar (ii), entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j \oplus \sum_{j=1}^m (-\beta_j) \mathbf{v}_j \\ &= \sum_{\mathbf{u}_\ell = \mathbf{v}_k} (\alpha_\ell - \beta_k) \mathbf{u}_\ell \oplus \sum_{\substack{\mathbf{u}_\ell \\ \forall k: \mathbf{u}_\ell \neq \mathbf{v}_k}} \alpha_\ell \mathbf{u}_\ell \oplus \sum_{\substack{\mathbf{v}_k \\ \forall \ell: \mathbf{u}_\ell \neq \mathbf{v}_k}} (-\beta_k) \mathbf{v}_k, \end{aligned}$$

y concluimos lo enunciado. $\square$

Lema 55 (Dependencia lineal de una lista de vectores). *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial y $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbf{V}$. Entonces son equivalentes las siguientes tres propiedades.*

- (i) $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ son linealmente dependientes.
- (ii) $\exists j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\mathbf{u}_j \in \text{span}(\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j-1}\})$,
- (iii) $\exists j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\text{span}(\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}) = \text{span}(\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \setminus \{\mathbf{u}_j\})$.

Proof. tbc. $\square$

Lema 56 (Dependencia lineal de un conjunto). *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial y $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}$. Entonces son equivalentes las siguientes tres propiedades.*

- (i) $\mathbf{A}$ es linealmente dependiente.
- (ii) $\exists \mathbf{u} \in \mathbf{A} : \mathbf{u} \in [\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{u}\}]$.
- (iii) $\exists \mathbf{u} \in \mathbf{A} : [\mathbf{A}] = [\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{u}\}]$.

Proof. Procedemos a demostrar $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Supongamos que $\mathbf{A}$ es linealmente dependiente. Por definición existe una finita cantidad de vectores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbf{A}$ que son linealmente dependientes, es decir $\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j = \mathbf{0}$ con los α_j no todos igual a 0. Sea, en particular, $k \in \{1, \dots, n\}$ con $\alpha_k \neq 0$. Entonces

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 \oplus \dots \oplus \alpha_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} \oplus \alpha_{k+1} \mathbf{u}_{k+1} \oplus \dots \oplus \alpha_n \mathbf{u}_n = -\alpha_k \mathbf{u}_k,$$

o bien

$$\frac{\alpha_1}{-\alpha_k} \mathbf{u}_1 \oplus \dots \oplus \frac{\alpha_{k-1}}{-\alpha_k} \mathbf{u}_{k-1} \oplus \frac{\alpha_{k+1}}{-\alpha_k} \mathbf{u}_{k+1} \oplus \dots \oplus \frac{\alpha_n}{-\alpha_k} \mathbf{u}_n = \mathbf{u}_k.$$

Por lo tanto, $\mathbf{u}_k \in \text{span}(\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{u}_k\}) = [\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{u}_k\}]$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Supongamos que $\exists \mathbf{u} \in \mathbf{A} : \mathbf{u} \in [\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{u}\}]$. En particular, $\mathbf{u}$ es una combinación lineal de elementos de $\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{u}\}$. Sea $\mathbf{v} \in [\mathbf{A}]$ una combinación lineal de elementos de $\mathbf{A}$. Si en esta combinación lineal aparece $\mathbf{u}$, lo podemos cambiar por la combinación lineal de elementos de $\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{u}\}$ mencionada arriba, y así concluimos que $\mathbf{v} \in [\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{u}\}]$. Por lo tanto, $[\mathbf{A}] \subset [\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{u}\}]$. La inclusión $[\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{u}\}] \subset [\mathbf{A}]$ es obvia.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Supongamos que $\exists \mathbf{u} \in \mathbf{A} : [\mathbf{A}] = [\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{u}\}]$. En particular $\mathbf{u} \in [\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{u}\}]$. Entonces existe una finita cantidad de vectores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbf{A}$, $\mathbf{u}_j \neq \mathbf{u}$, tal que $\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j = \mathbf{u}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbf{A}$ son mutuamente distintos. Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0},$$

lo que significa que $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}$ son linealmente dependientes, y por lo tanto también $\mathbf{A}$. $\square$

Corolario 57. *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial y $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}$. Entonces $\mathbf{A}$ es linealmente independiente si y solo si $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{A} : [\mathbf{A}] \neq [\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{u}\}]$.*

En Lema 56 no tenemos más información sobre el vector u cuyo existencia se establece en los puntos (ii), (iii). Sin tenemos más conocimiento del conjunto $\mathbf{A}$, entonces podemos mostrar lo siguiente.

Lema 58 (Dependencia lineal de un conjunto, pt. 2). *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}$ linealmente independiente, y $\mathbf{u} \notin \mathbf{A}$. Entonces*

$$\mathbf{A} \cup \{\mathbf{u}\} \text{ linealmente dependiente} \Leftrightarrow \mathbf{u} \in [\mathbf{A}].$$

Proof. Mostramos primero la dirección $\Rightarrow$. Dado que $\mathbf{A} \cup \{\mathbf{u}\}$ es linealmente dependiente, existe una combinación lineal no trivial de elementos de $\mathbf{A} \cup \{\mathbf{u}\}$ que genera $\mathbf{0}$. Dado que $\mathbf{A}$ es linealmente independiente, esta combinación lineal necesariamente tiene que tener la forma

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n \mathbf{u}_n + \alpha \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

con $\mathbf{u}_j \in \mathbf{A}$ y $\alpha \neq 0$. Por lo tanto,

$$\mathbf{u} = \frac{\alpha_1}{-\alpha} \mathbf{u}_1 \oplus \dots \oplus \frac{\alpha_n}{-\alpha} \mathbf{u}_n,$$

o sea $\mathbf{u} \in [\mathbf{A}]$. Para ver la dirección $\Leftarrow$, supongamos que $\mathbf{u} \in [\mathbf{A}]$, o sea $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j$ con $\mathbf{u}_j \in \mathbf{A}$. Por lo tanto, $\mathbf{0} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j \oplus (-1)\mathbf{u}$. Dado que $\mathbf{u}_j \neq \mathbf{u}$ para todo $j = 1, \dots, n$, pues $\mathbf{u} \notin \mathbf{A}$. Por lo tanto, la combinación finita $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}\}$ de elementos mutuamente distintos es linealmente dependiente, y por lo tanto también $\mathbf{A} \cup \{\mathbf{u}\}$. $\square$

Definición 59 (Base). *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K . Un subconjunto $\mathbf{B} \subset \mathbf{V}$ se llama **base** de $\mathbf{V}$, si $\mathbf{B}$ es un sistema generador linealmente independiente.*

Ejemplo 60. (i) Los vectores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ son una base de K^n .

(ii) Las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son una base de $K^{2 \times 2}$.

Teorema 61 (Bases). Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K y $\mathbf{B} \subset \mathbf{V}$ un subconjunto. Entonces son equivalentes las siguientes propiedades.

- (i) $\mathbf{B}$ es una base de $\mathbf{V}$.
- (ii) $\mathbf{B}$ es un sistema generador minimal, es decir, cualquier subconjunto $\mathbf{A} \subsetneq \mathbf{B}$ no es sistema generador.
- (iii) $\mathbf{B}$ es un subconjunto linealmente independiente maximal de $\mathbf{V}$, es decir, cualquier subconjunto $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}$ con $\mathbf{B} \subsetneq \mathbf{A}$ es linealmente dependiente.
- (iv) Cada vector en $\mathbf{V}$ se puede escribir como una combinación lineal de elementos de $\mathbf{B}$, y esta representación es única en el sentido de Corolario 54 (ii).

Proof. Procedemos a demostrar $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $\mathbf{B}$ una base de $\mathbf{V}$. Entonces es un sistema generado por definición. Para mostrar que es minimal, sea $\mathbf{A} \subsetneq \mathbf{B}$. Por lo tanto, existe un elemento $\mathbf{u} \in \mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$. Dado que $\mathbf{B}$ es linealmente independiente, Corolario 57 implica $\mathbf{u} \notin [\mathbf{B} \setminus \{\mathbf{u}\}]$. Además, $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \setminus \{\mathbf{u}\}$, lo que implica $[\mathbf{A}] \subset [\mathbf{B} \setminus \{\mathbf{u}\}]$, y efectivamente $\mathbf{u} \notin [\mathbf{A}]$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sea $\mathbf{B}$ es un sistema generador minimal. Eso implica que para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{B}$, el conjunto $\mathbf{B} \setminus \{\mathbf{u}\}$ no es sistema generador, en particular $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{B} : [\mathbf{B}] \neq [\mathbf{B} \setminus \{\mathbf{u}\}]$. Por Corolario 57, $\mathbf{B}$ es linealmente independiente. Falta demostrar la maximalidad. Sea $\mathbf{B} \subsetneq \mathbf{A}$. Es decir, existe $\mathbf{u} \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$. Entonces $\mathbf{u} \in \mathbf{V} = [\mathbf{B}] \subset [\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{u}\}]$, en particular $\mathbf{u} \in [\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{u}\}]$. Por Lema 56, $\mathbf{A}$ es linealmente dependiente.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Sea $\mathbf{B}$ es un subconjunto linealmente independiente maximal de $\mathbf{V}$. Supongamos que existe $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ que no se puede escribir como combinación lineal de elementos de $\mathbf{B}$, o sea $\mathbf{u} \notin [\mathbf{B}]$. Entonces $\mathbf{B} \subsetneq \mathbf{B} \cup \{\mathbf{u}\}$, y por lo tanto este último conjunto es linealmente dependiente. Según Lema 58, $\mathbf{u} \in [\mathbf{B}]$, lo que contradice la hipótesis. La unicidad de las representaciones es una consecuencia de Corolario 54. $\square$

Una pregunta natural es si cada espacio vectorial tiene una base.

Definición 62. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial y $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}$ un conjunto finito que es sistema generador, es decir, $[\mathbf{A}] = \mathbf{V}$. Entonces $\mathbf{V}$ se llama **espacio vectorial de dimension finita**. En el caso contrario, $\mathbf{V}$ se llama **espacio vectorial de dimension infinita**.

Por ejemplo, K^n y $K^{m \times n}$ son de dimension finita. Para responder la pregunta si un espacio vectorial tiene una base, consideramos primero dimension finita.

Lema 63. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimension finita. Entonces $\mathbf{V}$ tiene una base. En particular, si $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}$ es sistema generador finito, entonces existe una base $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$.

Proof. Si $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{A} : \mathbf{u} \notin [\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{u}\}]$, entonces $\mathbf{A}$ es linealmente independiente y por lo tanto una base. Si $\exists \mathbf{u}_0 \in \mathbf{A} : \mathbf{u}_0 \in [\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{u}_0\}]$, entonces definimos $\mathbf{A}_1 := \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{u}_0\}$. Notamos que $[\mathbf{A}_1] = [\mathbf{A}]$.

El procedimiento de arriba lo podemos aplicar a $\mathbf{A}_1$: Si $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{A}_1 : \mathbf{u} \notin [\mathbf{A}_1 \setminus \{\mathbf{u}\}]$, entonces $\mathbf{A}_1$ es linealmente independiente y por lo tanto una base. Si $\exists \mathbf{u}_1 \in \mathbf{A}_1 : \mathbf{u}_1 \in [\mathbf{A}_1 \setminus \{\mathbf{u}_1\}]$, entonces definimos $\mathbf{A}_2 := \mathbf{A}_1 \setminus \{\mathbf{u}_1\}$. Notamos que $[\mathbf{A}_2] = [\mathbf{A}_1] = [\mathbf{A}]$.

Dado que $\mathbf{A}$ es un conjunto finito, despues de una finita cantidad de pasos n llegaremos a un conjunto $\mathbf{A}_n$ que es linealmente independiente, $\mathbf{A}_n \subset \mathbf{A}$, y $[\mathbf{A}_n] = [\mathbf{A}]$. Por definición, $\mathbf{A}_n$ es una base. $\square$

Con técnicas matemáticas mas avanzadas (las palabras clave son *Lema de Zorn* y *Axioma de Elección*), se puede mostrar lo siguiente.

Teorema 64. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial. Entonces $\mathbf{V}$ tiene una base.

Según nuestro conocimiento actual es todavia posible que un espacio vectorial $\mathbf{V}$ tiene una base con 5 elementos, y otra base con 100 elementos. Aún peor, todavia tenemos que asumir la posibilidad que exista un espacio vectorial $\mathbf{V}$ con una base con 5 elementos, y otra base de una infinita cantidad de elementos. Este problema lo trataremos ahora.

Lema 65 (Lemma de intercambio). Sea $\mathbf{B}$ base de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ y $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbf{V}$. Sea $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j$ con $\mathbf{u}_j \in \mathbf{B}$. Si $\alpha_k \neq 0$, entonces $\mathbf{B}' := (\mathbf{B} \setminus \{\mathbf{u}_k\}) \cup \{\mathbf{u}\}$ es una base de $\mathbf{V}$. En particular, siempre existe $\mathbf{v} \in \mathbf{B}$ tal que $(\mathbf{B} \setminus \{\mathbf{v}\}) \cup \{\mathbf{u}\}$ es una base de $\mathbf{V}$.

Proof. Sea $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j$ y $\alpha_k \neq 0$. Notamos que por $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ existe por lo menos un α_k con esta propiedad. Mostraremos que $\mathbf{B}'$ es base de $\mathbf{V}$, es decir un sistema generador linealmente independiente.

$\mathbf{B}'$ es sistema generador: Dado que $\alpha_k \neq 0$, vemos

$$\mathbf{u}_k = \frac{1}{\alpha_k} \mathbf{u} \oplus \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{-\alpha_j}{\alpha_k} \mathbf{u}_j.$$

Por lo tanto $\mathbf{u}_k \in [\mathbf{B}']$, y eso implica $[\mathbf{B}'] = [\mathbf{B} \cup \{\mathbf{u}\}] \supset [\mathbf{B}] = \mathbf{V}$.

$\mathbf{B}'$ es linealmente independiente: Supongamos que $\mathbf{B}' = (\mathbf{B} \setminus \{\mathbf{u}_k\}) \cup \{\mathbf{u}\}$ es linealmente dependiente. Dado que $\mathbf{B} \setminus \{\mathbf{u}_k\}$ es linealmente independiente, podemos aplicar Lemma 58 para concluir que $\mathbf{u} \in [\mathbf{B} \setminus \{\mathbf{u}_k\}]$. Sin embargo, eso contradice la hipótesis $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j$ con $\alpha_k \neq 0$. Por lo tanto, $\mathbf{B}$ tiene que ser linealmente dependiente. $\square$

Ejemplo 66. Los vectores $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 0)$ son una base de $\mathbb{R}^3$. Si $\mathbf{w} = (1, -1, 0)$, entonces $\mathbf{w} = -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$. Por lo tanto, $\mathbf{w}, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ es una base, y $\mathbf{u}_1, \mathbf{w}, \mathbf{u}_3$ es una base. Sin embargo, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}$ no es una base.

Teorema 67 (Teorema de Intercambio de Steinitz). Sea $\mathbf{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base finita de $\mathbf{V}$, y $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ un conjunto de vectores linealmente independiente en $\mathbf{V}$. Entonces $m \leq n$, y existe un conjunto de $n-m$ vectores en $\mathbf{B}$, digamos $\mathbf{u}_{m+1}, \dots, \mathbf{u}_n$, tal que $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m, \mathbf{u}_{m+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es una base de $\mathbf{V}$.

Proof. En un primer paso, notamos que $\mathbf{w}_1 \neq \mathbf{0}$, y por el Lema 65 existe un vector en $\mathbf{B}$, digamos $\mathbf{u}_1$, tal que $\mathbf{B}_1 := (\mathbf{B} \setminus \{\mathbf{u}_1\}) \cup \{\mathbf{w}_1\} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es una base de $\mathbf{V}$.

En un segundo paso, escribimos $\mathbf{w}_2$ como combinación lineal de elementos de $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{w}_2 = \alpha_1 \mathbf{w}_1 \oplus \sum_{j=2}^n \alpha_j \mathbf{u}_j$. Notamos que existe por lo menos un α_j , $j = 2, \dots, n$ con $\alpha_j \neq 0$, pues en el caso contrario $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ serán linealmente dependiente. Por el Lema 65 existe un vector entre $\{\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$, digamos $\mathbf{u}_2$, tal que $\mathbf{B}_2 := (\mathbf{B}_1 \setminus \{\mathbf{u}_2\}) \cup \{\mathbf{w}_2\} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base de $\mathbf{V}$.

En el paso k , escribimos $\mathbf{w}_k$ como combinación lineal de elementos de $\mathbf{B}_{k-1}$, $\mathbf{w}_k = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j \mathbf{w}_j \oplus \sum_{j=k}^n \alpha_j \mathbf{u}_j$. Notamos que existe por lo menos un α_j , $j = k, \dots, n$ con $\alpha_j \neq 0$, pues en el caso contrario $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ serán linealmente dependiente. Por el Lema 65 existe un vector entre $\{\mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_n\}$, digamos $\mathbf{u}_k$, tal que $\mathbf{B}_k := (\mathbf{B}_{k-1} \setminus \{\mathbf{u}_k\}) \cup \{\mathbf{w}_k\} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base de $\mathbf{V}$.

Si $m > n$, entonces después de n pasos llegaremos a una base $\mathbf{B}_n = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ de $\mathbf{V}$, lo que implicaría que $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ es linealmente dependiente, una contradicción. Por lo tanto, $m \leq n$. $\square$

El Teorema de Intercambio de Steinitz tiene varias consecuencias.

Corolario 68. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial, $\mathbf{A}$ un conjunto generador finito con n elementos, y $\mathbf{W}$ un conjunto linealmente independiente. Entonces $\mathbf{W}$ es finito y tiene menor o igual a n elementos.

Proof. Si $\mathbf{A}$ es un conjunto generador finito con n elementos, entonces por Teorema XXX existe una base $\mathbf{B}$ con menor o igual a n elementos. Por el Teorema de Intercambio de Steinitz, $\mathbf{W}$ no puede contener más que n vectores linealmente independientes, por lo tanto, $\mathbf{W}$ es finito y contiene menor o igual a n elementos. $\square$

En otras palabras, **cada base de un espacio vectorial de dimension finita tiene una finita cantidad de elementos.**

Corolario 69. *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimension finita y $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ dos bases. Entonces $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ tienen la misma cantidad de elementos.*

Proof. Tanto $\mathbf{B}_1$ como $\mathbf{B}_2$ son bases, por lo tanto, linealmente independientes. Por el Teorema de Intercambio de Steinitz, $\mathbf{B}_1$ tiene una cantidad de elementos menor o igual que $\mathbf{B}_2$. Por otro lado, $\mathbf{B}_2$ tiene una cantidad de elementos menor o igual que $\mathbf{B}_1$. En efecto, tienen la misma cantidad de elementos. $\square$

Cada espacio vectorial tiene una base, y si es de dimension finita, entonces la cantidad de elementos en una base es un número natural y no depende de una base en particular. Entonces podemos hacer la siguiente definición.

Definición 70 (Dimension de un espacio vectorial). *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimension finita. Entonces se define la **dimension** de $\mathbf{V}$ como $\dim(\mathbf{V}) = n$, donde n es el número de elementos en una base de $\mathbf{V}$.*

Obtenemos de inmediato lo siguiente.

Corolario 71. *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial con $\dim(\mathbf{V}) = n$. Si $\mathbf{W}$ tiene n elementos y es linealmente independiente, entonces es una base.*

Dado que la base de un subespacio es linealmente independiente, obtenemos lo siguiente.

Corolario 72. *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimension finita y $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$. Entonces $\dim(\mathbf{U}) \leq \dim(\mathbf{V})$. Además, si $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{\dim(\mathbf{U})}\}$ es una base de $\mathbf{U}$, entonces existe una base*

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{\dim(\mathbf{U})}, \mathbf{u}_{\dim(\mathbf{U})+1}, \dots, \mathbf{u}_{\dim(\mathbf{V})}\}$$

de $\mathbf{V}$.

Teorema 73 (Dimensiones de subespacios). *Sean $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2 \leq \mathbf{V}$ dos subespacios de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ de dimension finita. Entonces*

$$\dim(\mathbf{U}_1) + \dim(\mathbf{U}_2) = \dim(\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2) + \dim(\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2).$$

Proof. Usaremos las abreviaciones $\dim(\mathbf{U}_1) = r$, $\dim(\mathbf{U}_2) = t$, $\dim(\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2) = m$. Entonces existe una base $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ de $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2$, y por el Corolario 72 la podemos extender a una base

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_r\}$$

de $\mathbf{U}_1$, y también a una base

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_{m+1}, \dots, \mathbf{w}_t\}$$

de $\mathbf{U}_2$. Definimos

$$\mathbf{C} := \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_{m+1}, \dots, \mathbf{w}_t\},$$

y postulamos que $\mathbf{C}$ es una base de $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$: De inmediato vemos que $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 = [\mathbf{C}]$. Falta mostrar que $\mathbf{C}$ es linealmente independiente. Sea

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{u}_j \oplus \sum_{j=m+1}^r \alpha_j \mathbf{v}_j \oplus \sum_{j=m+1}^t \beta_j \mathbf{w}_j = \mathbf{0}. \quad (2.3)$$

Observamos que

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{u}_j \oplus \sum_{j=m+1}^r \alpha_j \mathbf{v}_j = \sum_{j=m+1}^t (-\beta_j) \mathbf{w}_j.$$

El vector de arriba es elemento de $\mathbf{U}_1$ y también de $\mathbf{U}_2$, por lo tanto es elemento de $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2$. Entonces existen coeficientes γ_j tal que

$$\sum_{j=m+1}^t \beta_j \mathbf{w}_j = \sum_{j=1}^m \gamma_j \mathbf{u}_j,$$

o sea

$$\sum_{j=m+1}^t \beta_j \mathbf{w}_j \oplus \sum_{j=1}^m (-\gamma_j) \mathbf{u}_j = \mathbf{0}.$$

Sin embargo, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_{m+1}, \dots, \mathbf{w}_t\}$ es una base y por lo tanto linealmente independiente, lo que implica $\beta_{m+1} = \dots = \beta_t = 0$. De (2.3) queda

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{u}_j \oplus \sum_{j=m+1}^r \alpha_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0},$$

y dado que $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_r\}$ es una base y por lo tanto linealmente independiente, obtenemos $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$. $\square$

Chapter 3

Transformaciones lineales

Definición 74 (Transformación lineal). Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ dos espacios vectoriales sobre un cuerpo K . Una función $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ se llama **lineal** (o **homomorfismo**), si y solo si se tiene

(i) Aditividad: $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V} : f(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) \oplus f(\mathbf{v})$,

(ii) Homogeneidad: $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}, \alpha \in K : f(\alpha \mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u})$.

Notamos que en la última definición ocupamos dos sumas, una en $\mathbf{V}$ y una en $\mathbf{W}$, y para identificarlas deberíamos escribir

$$f(\mathbf{u} \oplus_{\mathbf{V}} \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) \oplus_{\mathbf{W}} f(\mathbf{v}).$$

Sin embargo, vamos a usar solamente el símbolo $\oplus$ si no hay ambigüedad. ¡Lo mismo aplica al producto!

Ejemplo 75. ¿Existen transformaciones lineales?

- Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ dos espacios vectoriales sobre un cuerpo K y

$$f : \begin{cases} \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W} \\ \mathbf{u} \mapsto \mathbf{0}_{\mathbf{W}} \end{cases}$$

la función cero. Entonces f es lineal, pues para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$

$$f(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathbf{W}} = \mathbf{0}_{\mathbf{W}} \oplus \mathbf{0}_{\mathbf{W}} = f(\mathbf{u}) \oplus f(\mathbf{v}),$$

y para $\mathbf{u} \in \mathbf{V}, \alpha \in K$

$$f(\alpha \mathbf{u}) = \mathbf{0}_{\mathbf{W}} = \alpha \mathbf{0}_{\mathbf{W}} = \alpha f(\mathbf{u}).$$

- Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial y

$$\text{id}_{\mathbf{V}} : \begin{cases} \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V} \\ \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} \end{cases}$$

la identidad. Entonces $\text{id}_{\mathbf{V}}$ es lineal.

- Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K y $\alpha_0 \in K$. Sea

$$f : \begin{cases} \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V} \\ \mathbf{u} \mapsto \alpha_0 \mathbf{u} \end{cases}$$

Entonces f es lineal, pues la definición de espacio vectorial implica para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$

$$f(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \alpha_0 (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \alpha_0 \mathbf{u} \oplus \alpha_0 \mathbf{v} = f(\mathbf{u}) \oplus f(\mathbf{v}),$$

y para $\mathbf{u} \in \mathbf{V}, \alpha \in K$

$$f(\alpha \mathbf{u}) = \alpha_0 (\alpha \mathbf{u}) = \alpha (\alpha_0 \mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}).$$

- Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{W} = \mathbb{R}^3$, y

$$f : \begin{cases} \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W} \\ (x, y) \mapsto (x - 2y, 3x + y, -x), \end{cases}$$

entonces f es lineal.

- Sea $\mathcal{P}_n$ el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual a n . Entonces la derivada

$$\frac{d}{dx} : \begin{cases} \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n-1} \\ p \mapsto p' \end{cases}$$

es lineal, y la integral definida

$$\int_0^1 dx : \begin{cases} \mathcal{P}_n \rightarrow \mathbb{R} \\ p \mapsto \int_0^1 p(x) dx \end{cases}$$

es lineal.

Empezamos con unos resultados simples.

Lema 76. Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ dos espacios vectoriales sobre un cuerpo K . Entonces se tiene lo siguiente.

(i) Si $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ es lineal, entonces $f(\mathbf{0}_\mathbf{V}) = \mathbf{0}_\mathbf{W}$.

(ii) Una función $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ es lineal si y solo si

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \alpha \in K : f(\alpha \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) \oplus f(\mathbf{v}).$$

(iii) Una función $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ es lineal si y solo si

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall \mathbf{u}_j \in \mathbf{V}, \alpha_j \in K, j = 1, \dots, n : f\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f(\mathbf{u}_j).$$

Proof. Para demostrar (i), recordamos $\mathbf{0}_{\mathbf{V}} = \mathbf{0}_{\mathbf{V}} \oplus \mathbf{0}_{\mathbf{V}}$, luego

$$f(\mathbf{0}_{\mathbf{V}}) = f(\mathbf{0}_{\mathbf{V}} \oplus \mathbf{0}_{\mathbf{V}}) = f(\mathbf{0}_{\mathbf{V}}) \oplus f(\mathbf{0}_{\mathbf{V}}),$$

y por Lema 37 concluimos $f(\mathbf{0}_{\mathbf{V}}) = \mathbf{0}_{\mathbf{W}}$.

tbc. □

Ejemplo 77. La función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f((x, y)) = (x - y, x + y, x + 1)$ no es lineal, pues $f(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}) = f((0, 0)) = (0, 0, 1) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$.

Homomorfismos respetan la estructura de espacios vectoriales.

Teorema 78. Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ dos espacios vectoriales sobre un cuerpo K y $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ lineal. Entonces

$$(i) \quad \mathbf{U} \leq \mathbf{V} \Rightarrow f(\mathbf{U}) \leq \mathbf{W}.$$

$$(ii) \quad \mathbf{T} \leq \mathbf{W} \Rightarrow f^{-1}(\mathbf{T}) \leq \mathbf{V}.$$

$$(iii) \quad \mathbf{A} \subset \mathbf{V} \Rightarrow f([\mathbf{A}]) = [f(\mathbf{A})].$$

$$(iv) \quad \text{Si } f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W} \text{ es biyectiva, entonces la inversa } f^{-1} : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V} \text{ es lineal.}$$

Proof. Para mostrar (i), verificamos las tres propiedades en Teorema 42: Dado que $\mathbf{0}_{\mathbf{V}} \in \mathbf{U}$ vemos primero que $\mathbf{0}_{\mathbf{W}} = f(\mathbf{0}_{\mathbf{V}}) \in f(\mathbf{U})$ según Lema 76. Segundo, sean $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in f(\mathbf{U})$. En particular, existen $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{U}$ con $\mathbf{w}_1 = f(\mathbf{u}_1), \mathbf{w}_2 = f(\mathbf{u}_2)$. Por $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$ tenemos $\mathbf{u}_1 \oplus \mathbf{u}_2 \in \mathbf{U}$, y por lo tanto,

$$\mathbf{w}_1 \oplus \mathbf{w}_2 = f(\mathbf{u}_1) \oplus f(\mathbf{u}_2) = f(\mathbf{u}_1 \oplus \mathbf{u}_2) \in f(\mathbf{U}).$$

Tercero, sean $\mathbf{w} \in f(\mathbf{U}), \alpha \in K$. Entonces existe $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ con $\mathbf{w} = f(\mathbf{u})$. Por $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$ tenemos $\alpha \mathbf{u} \in \mathbf{U}$, y por lo tanto

$$\alpha \mathbf{w} = \alpha f(\mathbf{u}) = f(\alpha \mathbf{u}) \in f(\mathbf{U}).$$

Para mostrar (ii), verificamos también las tres propiedades en Teorema 42: Recordamos que

$$f^{-1}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{V} \mid f(\mathbf{u}) \in \mathbf{T}\}.$$

Dado que $\mathbf{0}_W \in \mathbf{T}$ y $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ concluimos que $\mathbf{0}_V \in f^{-1}(\mathbf{T})$. Segundo, sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in f^{-1}(\mathbf{T})$, es decir $f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2) \in \mathbf{T}$. Por $\mathbf{T} \leq \mathbf{W}$ tenemos $f(\mathbf{u}_1) \oplus f(\mathbf{u}_2) \in \mathbf{T}$, y por lo tanto,

$$f(\mathbf{u}_1 \oplus \mathbf{u}_2) = f(\mathbf{u}_1) \oplus f(\mathbf{u}_2) \in \mathbf{T},$$

o sea $\mathbf{u}_1 \oplus \mathbf{u}_2 \in f^{-1}(\mathbf{T})$. Tercero, sean $\mathbf{u} \in f^{-1}(\mathbf{T}), \alpha \in K$. Por $\mathbf{T} \leq \mathbf{W}$ tenemos $\alpha f(\mathbf{u}) \in \mathbf{T}$, y por lo tanto

$$f(\alpha \mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}) \in \mathbf{T},$$

o sea $\alpha \mathbf{u} \in f^{-1}(\mathbf{T})$.

El punto (iii) es una simple consecuencia de Lema 76 (iii).

Para mostrar (iv), sea $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ lineal y biyectiva. Sean $\mathbf{w}, \mathbf{x} \in \mathbf{W}, \alpha \in K$, y $\mathbf{w} = f(\mathbf{u}), \mathbf{x} = f(\mathbf{v})$. Dado que f es lineal, tenemos

$$f(\alpha \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) \oplus f(\mathbf{v}) = \alpha \mathbf{w} \oplus \mathbf{x},$$

es decir

$$\alpha f^{-1}(\mathbf{w}) \oplus f^{-1}(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = f^{-1}(\alpha \mathbf{w} \oplus \mathbf{x}),$$

Usando Lema 76 (ii) concluimos que f^{-1} es lineal. □

Definición 79. Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ dos espacios vectoriales sobre un cuerpo K y $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ lineal. Se define el **kernel** de f como

$$\ker(f) := f^{-1}(\{\mathbf{0}_W\}) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{V} \mid f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_W\},$$

y la **imagen** de f como

$$\text{img}(f) := f(\mathbf{V}).$$

En particular, $\ker(f) \leq \mathbf{V}$ y $\text{img}(f) \leq \mathbf{W}$.

Por definición, f es sobreyectiva si y solo si $\text{img}(f) = \mathbf{W}$. La inyectividad de f se puede caracterizar por el kernel.

Lema 80. Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ dos espacios vectoriales sobre un cuerpo K y $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ lineal. Entonces f es inyectiva si y solo si $\ker(f) = \{\mathbf{0}_V\}$.

Proof. Sea f inyectiva, o sea

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V} : \forall \mathbf{u}' \in \mathbf{V} : (f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}') \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}').$$

De Lema 76 (i) sabemos que $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, es decir $\{\mathbf{0}_V\} \subset \ker(f)$. Por otro lado, sea $\mathbf{u} \in \ker(f)$. Entonces $\mathbf{0}_W = f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{0}_V)$, y por la inyectividad de f concluimos $\mathbf{u} = \mathbf{0}_V$. Por lo tanto, $\ker(f) \subset \{\mathbf{0}_V\}$.

Ahora sea $\ker(f) = \{\mathbf{0}_V\}$. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in \mathbf{V}$ con $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}')$. Por linealidad de f vemos que $f(\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}')) = \mathbf{0}_W$, es decir $\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}') \in \ker(f)$. Concluimos $\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}') = \mathbf{0}_V$, o sea $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$. □

Transformaciones lineales se pueden caracterizar por como actúan sobre una base del espacio de partida.

Teorema 81. Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ dos espacios vectoriales sobre un cuerpo K . Sea $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base de $\mathbf{V}$, y $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \in \mathbf{W}$ vectores. Entonces existe única transformación lineal $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ con $f(\mathbf{u}_j) = \mathbf{w}_j$, $j = 1, \dots, n$.

Proof. Para cada $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ vamos a definir $f(\mathbf{u})$ de la siguiente manera: sea $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j$, entonces definimos

$$f(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{w}_j.$$

Entonces $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$, y $f(\mathbf{u}_j) = \mathbf{w}_j$, $j = 1, \dots, n$. Falta demostrar que f es lineal. Sean $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j$, $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{u}_j$, y $\alpha \in K$. Entonces $\alpha \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \sum_{j=1}^n (\alpha \alpha_j + \beta_j) \mathbf{u}_j$, y

$$f(\alpha \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = f\left(\sum_{j=1}^n (\alpha \alpha_j + \beta_j) \mathbf{u}_j\right) = \sum_{j=1}^n (\alpha \alpha_j + \beta_j) \mathbf{w}_j = \alpha \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{w}_j \oplus \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{w}_j = \alpha f(\mathbf{u}) \oplus f(\mathbf{v}).$$

Por lo tanto, f es lineal.

Para mostrar que f es única, supongamos que $g : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ es lineal con $g(\mathbf{u}_j) = \mathbf{w}_j$, $j = 1, \dots, n$, y mostraremos que $f(\mathbf{u}) = g(\mathbf{u})$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$. Sea $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j$, entonces

$$f(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{w}_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j g(\mathbf{u}_j) = g\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j\right) = g(\mathbf{u}).$$

□

De hecho, los valores de una transformación lineal sobre una base de $\mathbf{V}$ nos permiten determinar propiedades de f .

Lema 82. Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ dos espacios vectoriales sobre un cuerpo K y $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ lineal. Sea $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base de $\mathbf{V}$, y $\mathbf{w}_j := f(\mathbf{u}_j)$ para $j = 1, \dots, n$. Entonces tenemos lo siguiente.

- (i) $\text{img}(f) = [\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}]$. En particular, f es sobreyectiva si y solo si $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ es un sistema generador de $\mathbf{W}$.
- (ii) Los vectores $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ son linealmente independientes si y solo si f es inyectiva.
- (iii) Los vectores $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ son una base de $\mathbf{W}$ si y solo si f es biyectiva.

Proof. Para mostrar (i), notamos primero que $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\} \subset \text{img}(f)$, y dado que $\text{img}(f) \leq \mathbf{W}$ concluimos $[\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}] \subset \text{img}(f)$. Por otro lado, sea $\mathbf{w} \in \text{img}(f)$. Entonces $\mathbf{w} = f(\mathbf{u})$ para algún $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$. Podemos escribir $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j$, y Lema 76 (iii) muestra que

$$\mathbf{w} = \sum_{j=1}^n \alpha_j f(\mathbf{u}_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{w}_j,$$

o sea $\mathbf{w} \in [\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}]$. Por lo tanto, $\text{img}(f) \subset [\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}]$.

Ahora mostramos (ii). Primero sean $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ linealmente independientes. Hay que mostrar que f es inyectiva, así que sean $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in \mathbf{V}$ con $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}')$. Escribimos $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j$, $\mathbf{u}' = \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{u}_j$ y vemos que

$$f(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{w}_j = \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{w}_j = f(\mathbf{u}').$$

Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^n (\alpha_j - \beta_j) \mathbf{w}_j = \mathbf{0}_W,$$

y dado que $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ es linealmente independientes obtenemos $\alpha_j - \beta_j = 0$, $j = 1, \dots, n$. Concluimos $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$. $\square$

Ejemplo 83. Sea $\mathcal{P}_n$ el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual a n . Recordamos la base de monomios $\{m_0, \dots, m_n\}$ de $\mathcal{P}_n$, donde $m_j(x) = x^j$. Consideramos $f : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ por

$$f(p) = \begin{pmatrix} p(1) - p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix}.$$

Se puede mostrar que f es lineal. Por Lema 82, $\{f(m_0), f(m_1), f(m_2)\}$ genera $\text{img}(f)$, o sea

$$\text{img}(f) = \text{span} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right) = \text{span} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right).$$

En particular $\dim \text{img}(f) = 2$. Para encontrar una base de $\ker(f)$, notamos que $p \in \ker(f)$ si y solo si

$$\begin{pmatrix} p(1) - p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $p(x) = a + bx + cx^2$, entonces

$$0 = p(1) - p(2) = a + b + c - a - 2b - 4c = -b - 3c,$$

$$0 = f(0) = a.$$

Es decir, $p \in \ker(f)$ si y solo si $p(x) = -3cx + cx^2 = c(-3x + x^2)$. Por lo tanto, $\{\ell\}$ con $\ell(x) = -3x + x^2$ es una base de $\ker(f)$, y $\dim \ker(f) = 1$.

Definición 84. Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ dos espacios vectoriales sobre K .

- (i) Si existe una transformación lineal biyectiva $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$, entonces f se llama **isomorfismo**, y se dice que $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ son **isomorfos**, $\mathbf{V} \simeq \mathbf{W}$.
- (ii) Un isomorfismo $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ se llama **automorfismo**.

La palabra griega *isos* significa *igual*, mientras la palabra *morph* significa *forma*. Si dos espacios vectoriales son isomorfos $\mathbf{V} \simeq \mathbf{W}$, entonces se *representan*: Usando el isomorfismo $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ podemos hacer aritmética en $\mathbf{V}$ usando sus elementos $\mathbf{u}$, de igual manera podemos hacer aritmética en $\mathbf{W}$ usando sus elementos $f(\mathbf{u})$. El resultado será lo mismo (modulo el isomorfismo). De hecho, isomorfía $\simeq$ es una relación de equivalencia.

Corolario 85. Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ dos espacios vectoriales sobre K .

- (i) Si $\mathbf{V} \simeq \mathbf{W}$, entonces $\mathbf{V}$ es de dimensión finita si y solo si $\mathbf{W}$ es de dimensión finita. En este caso, $\dim(\mathbf{V}) = \dim(\mathbf{W})$.
- (ii) Si $\dim(\mathbf{V}) = \dim(\mathbf{W}) = n$, entonces $\mathbf{V} \simeq \mathbf{W}$.

Proof. Para mostrar (i), sea $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ un isomorfismo y supongamos que $\mathbf{V}$ es de dimension finita. Sea $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ base de $\mathbf{V}$. Según Lema 82 (iii), $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ con $\mathbf{w}_j := f(\mathbf{u}_j)$ es una base de $\mathbf{W}$.

Para mostrar (ii), sea $\dim(\mathbf{V}) = \dim(\mathbf{W}) = n$. Sean $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ base de $\mathbf{V}$ y $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ base de $\mathbf{W}$. Según Teorema 81 existe única transformación lineal $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ con $f(\mathbf{u}_j) = \mathbf{w}_j$, $j = 1, \dots, n$. Según Lema 82 (iii), f es biyectiva, por lo tanto un isomorfismo. $\square$

Teorema 86 (Formula de dimensiones). Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ dos espacios vectoriales sobre K , $\mathbf{V}$ de dimension finita, y $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ lineal. Entonces

$$\dim \ker(f) + \dim \operatorname{img}(f) = \dim(\mathbf{V}).$$

Proof. Según Lema 63 existe una base $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ de $\mathbf{V}$. Escribimos $m = \dim \ker(f)$. Usando el Teorema de Intercambio de Steinitz, podemos suponer que $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ es una base de $\ker(f)$. Ahora postulamos que $\{f(\mathbf{u}_{m+1}), \dots, f(\mathbf{u}_n)\}$ es una base de $\operatorname{img}(f)$, lo que mostraría la formula de dimensiones. Para mostrar los que hemos postulado, notamos primero que según Lema 82 (i),

$$\operatorname{img}(f) = [\{f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_n)\}] = [\{f(\mathbf{u}_{m+1}), \dots, f(\mathbf{u}_n)\}],$$

o sea $\{f(\mathbf{u}_{m+1}), \dots, f(\mathbf{u}_n)\}$ genera a $\operatorname{img}(f)$. Mostramos ahora que también es linealmente independiente: Sean $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n \in K$ tal que

$$\sum_{j=m+1}^n \alpha_j f(\mathbf{u}_j) = \mathbf{0}_W.$$

Por la linealidad de f tenemos $\sum_{j=m+1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j \in \ker(f)$. Por lo tanto existen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tal que

$$\sum_{j=m+1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{u}_j, \quad \text{o sea,} \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j = \mathbf{0}_{\mathbf{W}}.$$

Concluimos que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. En particular, $\{f(\mathbf{u}_{m+1}), \dots, f(\mathbf{u}_n)\}$ son linealmente independientes, y $\dim \operatorname{img}(f) = n - m$. $\square$

Corolario 87. Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ dos espacios vectoriales de dimension finita sobre K con $\dim(\mathbf{V}) = \dim(\mathbf{W})$, y $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ lineal. Entonces son equivalentes

(i) f es inyectiva.

(ii) f es sobreyectiva.

(iii) f es biyectiva.

Proof. Es suficiente mostrar que inyectividad es equivalente a sobreyectividad. Si f es inyectiva, entonces $\ker(f) = \{\mathbf{0}_{\mathbf{V}}\}$, o sea $\dim \ker(f) = 0$. La formula de dimensiones implica que $\dim \operatorname{img}(f) = \dim(\mathbf{V})$, lo que implica que $\operatorname{img}(f) = \mathbf{W}$, o sea f es sobreyectiva. Por otro lado, si f es sobreyectiva, entonces $\dim \operatorname{img}(f) = \dim(\mathbf{W})$, y la formula de dimensiones implica $\dim \ker(f) = 0$, o sea f es inyectiva. $\square$

Teorema 88. Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ dos espacios vectoriales sobre K , y $\mathbf{W}^{\mathbf{V}} := \{f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}\}$ el espacio vectorial de todas las funciones de $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$. Sea

$$L(\mathbf{V}, \mathbf{W}) := \{f \in \mathbf{W}^{\mathbf{V}} \mid f \text{ es lineal}\}$$

el conjunto de todas las transformaciones lineales de $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$. Entonces $L(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \leq \mathbf{W}^{\mathbf{V}}$. En particular, $L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ es un espacio vectorial. Si $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ son de dimensión finita, entonces

$$\dim(L(\mathbf{V}, \mathbf{W})) = \dim(\mathbf{V}) \cdot \dim(\mathbf{W}).$$

Proof. Primero mostraremos que $L(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \leq \mathbf{W}^{\mathbf{V}}$. Sean $f, g \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ y $\alpha \in K$. Al principio del presente capítulo ya hemos visto que la función zero $\mathbf{0} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ dada por $\mathbf{0}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_{\mathbf{W}}$ es lineal. Sean $f, g \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, entonces para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ y $\beta \in K$ tenemos

$$\begin{aligned} (f + g)(\beta \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) &= f(\beta \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus g(\beta \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \beta f(\mathbf{u}) \oplus f(\mathbf{v}) \oplus \beta g(\mathbf{u}) \oplus g(\mathbf{v}) \\ &= \beta(f + g)(\mathbf{u}) \oplus (f + g)(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Según Lema 76 (ii), $f + g \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Además,

$$(\alpha f)(\beta \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \alpha f(\beta \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \alpha \beta f(\mathbf{u}) \oplus \alpha f(\mathbf{v}) = \beta(\alpha f)(\mathbf{u}) \oplus (\alpha f)(\mathbf{v}).$$

Según Lema 76 (ii), $\alpha f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Según Teorema 42, $L(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \leq \mathbf{W}^{\mathbf{V}}$.

Ahora sean $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ de dimensión finita, $\dim(\mathbf{V}) = n$, $\dim(\mathbf{W}) = m$, y $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ base de $\mathbf{V}$ y $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ base de $\mathbf{W}$. Vamos a construir una base $\{f_{ij} \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$ de $L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Para definir f_{ij} , según Teorema 81 es suficiente definir los valores de f_{ij} para $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$. Definimos entonces para $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ la transformación lineal $f_{ij} \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ por

$$f_{ij}(\mathbf{u}_k) = \begin{cases} \mathbf{0}_W & \text{para } k \neq i \\ \mathbf{w}_j & \text{para } k = i. \end{cases}$$

Para mostrar que $\{f_{ij} \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$ es una base de $L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, mostraremos primero que es linealmente independiente. Sean $\alpha_{ij} \in K$ tal que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} f_{ij} = \mathbf{0} \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. En particular, para cada $k = 1, \dots, n$,

$$\mathbf{0}_W = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} f_{ij} \right) (\mathbf{u}_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} f_{ij}(\mathbf{u}_k) = \sum_{j=1}^m \alpha_{kj} f_{kj}(\mathbf{u}_k) \oplus \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} f_{ij}(\mathbf{u}_k) = \sum_{j=1}^m \alpha_{kj} \mathbf{w}_j.$$

Dado que los $\mathbf{w}_j$ son linealmente independientes, concluimos que $\alpha_{kj} = 0$ para $j = 1, \dots, m$. Finalmente, $\alpha_{ij} = 0$ para $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, es decir, $\{f_{ij} \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$ es linealmente independiente. Ahora mostraremos que también genera $L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Sea $g \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ entonces. Recordamos que $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ es base de $\mathbf{W}$, por lo tanto para cada $k = 1, \dots, n$ existen $\alpha_{kj} \in K, j = 1, \dots, m$, tal que $g(\mathbf{u}_k) = \sum_{j=1}^m \alpha_{kj} \mathbf{w}_j$. Vemos que

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}_k) &= \sum_{j=1}^m \alpha_{kj} \mathbf{w}_j = \sum_{j=1}^m \alpha_{kj} f_{kj}(\mathbf{u}_k) = \sum_{j=1}^m \alpha_{kj} f_{kj}(\mathbf{u}_k) \oplus \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} f_{ij}(\mathbf{u}_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} f_{ij}(\mathbf{u}_k) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} f_{ij} \right) (\mathbf{u}_k). \end{aligned}$$

Por Teorema 81, $g = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} f_{ij}$, lo que muestra que $\{f_{ij} \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$ genera $L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. $\square$

3.1 Repaso: Matrices

Para $(K, +, \cdot)$ un cuerpo hemos definido el espacio vectorial de matrices con m filas y n columnas

$$K^{m \times n} = \left\{ \begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m,1} & \cdots & u_{m,n} \end{pmatrix} \mid u_{j,k} \in K \text{ para todo } j = 1, \dots, m \text{ y } k = 1, \dots, n \right\}.$$

Formalmente podríamos definir, por ejemplo, $K^{m \times n} := (K^n)^m$. A partir de ahora, vamos a anotar una matriz $A \in K^{m \times n}$ como $A = (a_{ij})_{i=1, j=1}^{m, n}$. Vectores $\mathbf{a} \in K^{m \times 1}$ se llaman **vectores**

columnas, mientras vectores $\mathbf{a} \in K^{1 \times n}$ se llaman **vectores filas**. Las **columnas** de $A = (a_{ij})_{i=1, j=1}^{m, n}$ son $\mathbf{a}_j := (a_{ij})_{i=1}^m$, mientras las filas son $\widehat{\mathbf{a}}_i = (a_{ij})_{j=1}^n$,

$$A = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n) = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{a}}_1 \\ \widehat{\mathbf{a}}_2 \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{a}}_m \end{pmatrix}.$$

Recordamos las operaciones que hacen de $K^{m \times n}$ un espacio vectorial, la suma de matrices $C = A + B$

$$(c_{ij})_{i=1, j=1}^{m, n} := (a_{ij} + b_{ij})_{i=1, j=1}^{m, n}$$

y el producto con un escalar $\alpha \in K$, $C = \alpha A$,

$$(c_{ij})_{i=1, j=1}^{m, n} := (\alpha a_{ij})_{i=1, j=1}^{m, n}.$$

Sea la matriz $A^{k\ell} \in K^{m \times n}$ dada por

$$a_{ij}^{k\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, j = \ell \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Es fácil ver que $\{A^{k\ell} \mid k = 1, \dots, m, \ell = 1, \dots, n\}$ es una base de $K^{m \times n}$, en particular $\dim(K^{m \times n}) = mn$. Matrices $A \in K^{n \times n}$ se llaman **cuadradas**. Para $A \in K^{m \times n}$ y $B \in K^{n \times q}$ podemos definir el producto $C = AB \in K^{m \times q}$ por

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}.$$

Recordamos que el producto de matrices cumple con las leyes algebraicas

$$\begin{aligned} (AB)C &= A(BC), \\ (A+B)C &= AC + BC \\ A(B+C) &= AB + AC. \end{aligned}$$

Introduciremos una nueva notación, el **delta de Kronecker** δ_{ij} dado por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

La **matriz de identidad** $E_n \in K^{n \times n}$ es $E_n = (\delta_{ij})_{i=1, j=1}^{n, n}$. Notamos que para $A \in K^{m \times n}$ se tiene

$$E_m A = A E_n = A.$$

Una matriz $A \in K^{n \times n}$ se llama **invertible** (o **regular**), si existe una matriz $B \in K^{n \times n}$ con

$$AB = BA = E_n.$$

En este caso, se dice que B es **la inversa** de A , y se escribe $A^{-1} := B$. Si $A \in K^{m \times n}$, entonces la matriz $A^\top = (a'_{ji})_{j=1, i=1}^{n, m} \in K^{n \times m}$ dada por

$$a'_{ji} = a_{ij}$$

se llama **transpuesta** de A . Recordamos que

$$\begin{aligned} (\alpha A)^\top &= \alpha A^\top, \\ (A + B)^\top &= A^\top + B^\top, \\ (AB)^\top &= B^\top A^\top, \\ (A^{-1})^\top &= (A^\top)^{-1} \quad \text{si } A \text{ es invertible.} \end{aligned}$$

Recordamos las operaciones elementales fila.

Definición 89. Las tres operaciones elementales filas (columnas)

1. Multiplicación de la fila (columna) j con un escalar $0 \neq \alpha \in K$, $F_j(\alpha)$ ($C_j(\alpha)$).
2. Sumar el $\alpha \in K$ -multiple de fila (columna) j a fila (columna) k , $F_{k,j}(\alpha)$ ($C_{k,j}(\alpha)$).
3. Intercambiar filas (columnas) j y k , $F_{j,k}$, ($C_{j,k}(\alpha)$).

se llaman **operaciones elementales fila (columna)**.

Teorema 90. Anotamos con $0_{m,n} \in K^{m \times n}$ la matriz 0. Sea $A \in K^{m \times n}$. Usando operaciones elementales fila, la matriz A se puede transformar a una matriz que tiene las mismas columnas que la matriz

$$\begin{pmatrix} E_s & A_{s,n-s} \\ 0_{m-s,s} & 0_{m-s,n-s} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

con una matriz $A_{s,n-s} \in K^{s \times n-s}$. Por otro lado, usando operaciones elementales columnas, la matriz A se puede transformar a una matriz que tiene las mismas filas que la matriz

$$\begin{pmatrix} E_t & 0_{t,n-t} \\ A_{m-t,t} & 0_{m-t,n-t} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

con una matriz $A_{m-t,t} \in K^{m-t,t}$.

Definición 91. Sea

$$A = (\mathbf{a}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n) = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{a}}_m \end{pmatrix} \in K^{m \times n}.$$

Entonces la dimension del espacio generado por las columnas de A ,

$$r_c(A) := \dim(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}),$$

se llama **rango columna** de A . La dimension del espacio generado por las filas de A ,

$$r_f(A) := \dim(\{\hat{\mathbf{a}}_1, \dots, \hat{\mathbf{a}}_m\}),$$

se llama **rango fila** de A .

Obviamente, operaciones elementales filas mantienen el rango fila, mientras operaciones elementales columna mantienen el rango columna. Por lo tanto, tenemos lo siguiente.

Lema 92. Sea $A \in K^{m \times n}$. Entonces, para cada sucesión de operaciones elementales fila que transforma A a una matriz que tiene las mismas columnas que (3.1), se tiene $s = r_f(A)$. Además, para cada sucesión de operaciones elementales columna que transforma A a una matriz que tiene las mismas filas que (3.2), se tiene $t = r_c(A)$.

Una operaciones elemental fila/columna se puede representar por un producto con una matriz invertible.

Lema 93. Sea $A \in K^{m \times n}$.

- (i) Sea $F_j(\alpha)$ una operación elemental fila, y $\tilde{A} \in K^{m \times n}$ el resultado de aplicar $F_j(\alpha)$ a A . Sea $E_m \in K^{m \times m}$ la matriz de identidad, y $\tilde{E}_m \in K^{m \times m}$ el resultado de aplicar $F_j(\alpha)$ a E_m . Entonces

$$\tilde{A} = \tilde{E}_m A$$

- (ii) Sea $C_j(\alpha)$ una operación elemental columna, y $\tilde{A} \in K^{m \times n}$ el resultado de aplicar $C_j(\alpha)$ a A . Sea $E_n \in K^{n \times n}$ la matriz de identidad, y $\tilde{E}_n \in K^{n \times n}$ el resultado de aplicar $C_j(\alpha)$ a E_n . Entonces

$$\tilde{A} = A \tilde{E}_n.$$

- (iii) Las matrices $\tilde{E}$ de arriba se llaman **matrices elementales**. Una matriz elemental siempre es invertible, y su inversa también es una matriz elemental.

Comentario 94. De Lema 93 aprendemos que operaciones elementales filas se generan por multiplicar las matrices elementales desde la izquierda, mientras operaciones elementales columnas se generan por multiplicar las matrices elementales desde la derecha. Este punto de vista es bastante importante: por ejemplo, si $C = A \cdot B$ con $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times q}$, entonces

- las filas de C son combinaciones lineales de filas de B , y
- las columnas de C son combinaciones lineales de columnas de A .

Por ejemplo, si $B \in K^{n \times 1}$, entonces

$$A \cdot B = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n) \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ \vdots \\ b_{n,1} \end{pmatrix} = (b_{1,1}\mathbf{a}_1 \quad \cdots \quad b_{n,1}\mathbf{a}_n).$$

Tomando en cuenta este último comentario y usando Teorema 90, en particular la representación (3.2), obtenemos lo siguiente.

Lema 95. Sea $A \in K^{n \times n}$. Entonces son equivalentes

- (i) A es invertible,
- (ii) existe $C \in K^{n \times n}$ tal que $AC = E_n$,
- (iii) $r_c(A) = n$,
- (iv) A es un producto de matrices elementales.

Proof. Sea A invertible, entonces $C = A^{-1}$ cumple con $AC = E_n$.

Como destacamos en Comentario 94, las columnas de AC son combinaciones lineales de las columnas de A . Dado que son iguales a E_n , tenemos $r_c(A) = n$.

Sea $r_c(A) = n$. Según Teorema 90, existe una sucesión de operaciones elementales columnas $C^{(1)}, \dots, C^{(k)}$ que se puede escribir según Lema 93 como productos de matrices elementales desde la derecha

$$A \cdot \tilde{E}^{(1)} \cdots \tilde{E}^{(k)} = E_n.$$

Según Teorema 90, cada matriz $\tilde{E}^{(k)}$ es invertible, y su inversa es una matriz elemental. Entonces,

$$A = (\tilde{E}^{(k)})^{-1} \cdots (\tilde{E}^{(1)})^{-1},$$

o sea A es un producto de matrices elementales.

Si A es un producto de matrices elementales

$$A = \tilde{E}^{(k)} \cdots \tilde{E}^{(1)},$$

entonces con $B = (\tilde{E}^{(1)})^{-1} \cdots (\tilde{E}^{(k)})^{-1}$ se tiene $AB = BA = E_n$, o sea A es invertible. $\square$

Usando primero operaciones elementales columnas para transformar A a la forma (3.2), y despues operaciones elementales filas para transformar el resultado a la forma (3.1), obtenemos lo siguiente.

Teorema 96. *Sea $A \in K^{m \times n}$. Entonces $r = r_c(A)$ si y solo si existen matrices invertibles $U \in K^{m \times m}, V \in K^{n \times n}$ tal que*

$$UAV = \begin{pmatrix} E_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{m-r, r} & 0_{m-r, n-r} \end{pmatrix}$$

Proof. En un primer paso usamos operaciones elementales columnas para transforma A a una matriz que tiene las mismas filas que la matriz

$$\begin{pmatrix} E_r & 0_{r, n-r} \\ A_{m-r, r} & 0_{m-r, n-r} \end{pmatrix}$$

con $r = r_C(A)$, cf. Teorema 90. En un segundo paso usamos operaciones elementales filas para transformar la última matriz a la forma

$$\begin{pmatrix} E_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{m-r, r} & 0_{m-r, n-r} \end{pmatrix}.$$

Escribiendo las operaciones elementales como matrices, obtenemos el resultado. Para demostrar la otra dirección, notamos que según Lema 95 matrices invertibles se pueden escribir como productos de matrices elementales. Entonces, según Lema 92, $r = r_C(A)$. $\square$

Una consecuencia del último resultado es lo siguiente.

Lema 97. *Sea $A \in K^{m \times n}$. Entonces $r_c(A) = r_f(A)$.*

Proof. Usando Teorema 96, escribimos

$$UAV = \begin{pmatrix} E_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{m-r, r} & 0_{m-r, n-r} \end{pmatrix}$$

con $r = r_C(A)$. Notamos que

$$V^T A^T U^T = (UAV)^T = \begin{pmatrix} E_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{m-r, r} & 0_{m-r, n-r} \end{pmatrix}$$

Por Teorema 96, $r = r_c(A^T) = r_f(A)$. $\square$

Por lo tanto, podemos definir lo siguiente.

Definición 98. *Sea $A \in K^{m \times n}$, entonces se define el rango de A como $\text{rango}(A) = r_c(A)$.*

Corolario 99. *Sea $A \in K^{n \times n}$. Entonces so equivalentes*

- (i) $\text{rango}(A) = n$,
- (ii) A es invertible,
- (iii) existe $B \in K^{n \times n}$ con $AB = E_n$,
- (iv) existe $C \in K^{n \times n}$ con $CA = E_n$.

En este caso, $B = C = A^{-1}$.

3.2 Transformaciones lineales y matrices

Nuestro objetivo es relacionar transformaciones lineales y matrices. En un primer paso relacionamos vectores de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ de dimension finita $\dim(\mathbf{V}) = n$ sobre K con $K^{n \times 1}$.

Definición 100. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K con $\dim(\mathbf{V}) = n$. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base de $\mathbf{V}$. Para $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ con la representación

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j,$$

los coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ se llaman **coordenadas** de $\mathbf{v}$ con respecto a $\mathcal{B}$. Además, sea $\varphi_{\mathcal{B}} : \mathbf{V} \rightarrow K^{n \times 1}$ la única transformación lineal con $\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_j) = \mathbf{e}_j$, $j = 1, \dots, n$. Notamos que $\varphi_{\mathcal{B}}$ es un isomorfismo según Lema 82, y

$$\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

La transformación $\varphi_{\mathcal{B}}$ se llama **representación en coordenadas**.

En un segundo paso, podemos relacionar transformaciones lineales y matrices.

Definición 101. Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ dos espacios vectoriales sobre K con $\dim(\mathbf{V}) = n$ y $\dim(\mathbf{W}) = m$. Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ bases. Sea $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una transformación lineal. Entonces la matriz $(a_{jk})_{j=1, k=1}^{m, n} \in K^{m \times n}$ dada por

$$f(\mathbf{v}_k) = \sum_{j=1}^m a_{jk} \mathbf{w}_j, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

se llama **matriz de coordenadas de f respecto a las bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$** , y se denota con $A_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^f$.

En particular, notamos que la k -ésima columna de $A_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^f$ es $\varphi_{\mathcal{C}}(f(\mathbf{v}_k))$, es decir, las coordenadas de $f(\mathbf{v}_k)$ con respecto a $\mathcal{C}$.

Ejemplo 102. 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (x+3y, 2x+5y, 7x+9y)$. Con respecto a las bases canónicas $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ tenemos

$$A_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Sea $\mathcal{P}_k := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = \sum_{j=1}^k a_j x^j \right\}$ el espacio de polinomios de grado menor o igual a k . Sabemos que $B_k := \{m_0, \dots, m_k\}$, donde $m_j(x) = x^j$ son los monomios, es una base. Consideramos el operador “derivada” $D : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_2$ dado por $Dp = p'$. Calculamos $(Dm_0)(x) = 0$, $(Dm_1)(x) = 1$, $(Dm_2)(x) = 2x$, $(Dm_3)(x) = 3x^2$. Es decir, $Dm_0 = 0$, $Dm_1 = m_0$, $Dm_2 = 2m_1$, $Dm_3 = 3m_2$, y por lo tanto

$$A_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2}^D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si usamos la base $\mathcal{B} = \{m_0, m_0 + m_1, m_1 + m_2\}$ en $\mathcal{P}_2$, entonces vemos que $Dm_0 = 0$, $Dm_1 = m_0$, $Dm_2 = (-2)m_0 + 2(m_0 + m_1)$, $Dm_3 = 3m_0 + (-3)(m_0 + m_1) + 3(m_1 + m_2)$, y por lo tanto

$$A_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}}^D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Comentario 103. Notamos lo siguiente.

- (i) Para la identidad $\text{id} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ y una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$ tenemos $A_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}^{\text{id}} = E_n$, donde $n = \dim(\mathbf{V})$.
- (ii) Una matriz $A \in K^{m \times n}$ genera una transformación lineal $f_A : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$ a través de

$$f_A(\mathbf{v}) = A \cdot \mathbf{v}.$$

Si usamos bases canónicas $\mathcal{E}_n$ para $K^{n \times 1}$ y $\mathcal{E}_m$ para $K^{m \times 1}$, entonces

$$A_{\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m}^{f_A} = A.$$

De hecho, existe un isomorfismo entre el espacio de las transformaciones lineales y el espacio de las matrices.

Lema 104. Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ dos espacios vectoriales sobre K con $\dim(\mathbf{V}) = n$ y $\dim(\mathbf{W}) = m$. Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ bases.

- (i) La función $\Phi_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} : L(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \rightarrow K^{m \times n}$ dada por $\Phi_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) := A_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^f$ es un isomorfismo.

(ii) Para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ se tiene

$$\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = \varphi_{\mathcal{C}}(f(\mathbf{v})).$$

(iii) Se tiene

$$\dim \text{img}(f) = \text{rango}(\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)).$$

Proof. Mostramos (i). Para ver la linealidad sean $f, g : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ y $\alpha \in K$. Notamos

$$(f + \alpha g)(\mathbf{v}_k) = f(\mathbf{v}_k) + \alpha g(\mathbf{v}_k) = \sum_{j=1}^m a_{jk} \mathbf{w}_j + \alpha \sum_{j=1}^m b_{jk} \mathbf{w}_j = \sum_{j=1}^m (a_{jk} + \alpha b_{jk}) \mathbf{w}_j.$$

Eso muestra que $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f + \alpha g) = \Phi_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \alpha \Phi_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$, es decir, $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ es lineal. Falta mostrar que $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ es biyectiva. Según Corolario 87 es suficiente mostrar inyectividad, pues $\dim(L(\mathbf{V}, \mathbf{W})) = nm = \dim(K^{m \times n})$. Sea entonces $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ con $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \mathbf{0}_{K^{m \times n}}$. Es decir,

$$f(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}_{\mathbf{W}}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Por Teorema 81, $f = \mathbf{0}_{L(\mathbf{V}, \mathbf{W})}$.

Para mostrar el segundo punto, sea $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = (a_{j,k})_{j=1,k=1}^{m,n}$. Calculamos por linealidad de f y $\varphi_{\mathcal{C}}$ para $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{v}_k$

$$\varphi_{\mathcal{C}}(f(\mathbf{v})) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_{\mathcal{C}}(f(\mathbf{v}_k)) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \sum_{j=1}^m a_{jk} \varphi_{\mathcal{C}}(\mathbf{w}_j) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \sum_{j=1}^m a_{jk} \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_k a_{jk} \mathbf{e}_j,$$

o sea

$$\varphi_{\mathcal{C}}(f(\mathbf{v})) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \alpha_k a_{1k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \alpha_k a_{mk} \end{pmatrix} = \Phi_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \Phi_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}).$$

□

El punto (ii) del último resultado lo podemos visualizar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{V} & \xrightarrow{f} & \mathbf{W} & \\ \varphi_{\mathcal{B}} \downarrow & & & & \downarrow \varphi_{\mathcal{C}} \\ & K^{n \times 1} & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)} & K^{m \times 1} & \end{array}$$

La composición de dos transformaciones lineales corresponde al producto de matrices.

Lema 105. Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{X}$ espacios vectoriales de dimension finita sobre K , con bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$, respectivamente. Sean $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W}), g \in L(\mathbf{W}, \mathbf{X})$. Entonces $g \circ f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{X})$, y

$$\Phi_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(g \circ f) = \Phi_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g) \cdot \Phi_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f).$$

Recordamos que para matrices tenemos la distributividad

$$(A + B)C = AC + BC \quad A(B + C) = AB + AC.$$

Al nivel de funciones esperamos entonces

$$(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h \quad f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h.$$

La primera identidad se cumple para todas las funciones, la segunda solo para f lineal.

3.2.1 Cambio de base

Definición 106. Sean $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ bases de $\mathbf{V}$ con $\dim(\mathbf{V}) = n$. Sea $\Phi_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}} : L(\mathbf{V}, \mathbf{V}) \rightarrow K^{n \times n}$ el isomorfismo del Lema 104. Entonces se define

$$C_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}} := \Phi_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}}(\text{id})$$

se llama **matriz cambio de base**.

Lema 107. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial con $\dim(\mathbf{V}) = n$. Entonces, cada matriz cambio de base $C_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}}$ es invertible, y

$$C_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}}^{-1} = C_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}.$$

Además,

(i) Para cada matriz invertible $C \in K^{n \times n}$ y base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$ existen bases $\tilde{\mathcal{B}}_1, \tilde{\mathcal{B}}_2$ de $\mathbf{V}$ tal que

$$C = C_{\tilde{\mathcal{B}}_1, \mathcal{B}}, \quad C = C_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}_2}.$$

Proof. Por Lema 105 y comentario 103,

$$E_n = \Phi_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\text{id}) = \Phi_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\text{id} \circ \text{id}) = \Phi_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}}(\text{id}) \cdot \Phi_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(\text{id}) = C_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}} \cdot C_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}.$$

Por Corolario 99, $C_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}}$ es invertible y su inversa es $C_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}$.

Ahora, sea $\mathcal{B}$ base de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{c}_j$ la j -ésima columna de C . Definimos $\tilde{\mathbf{v}}_j := \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{c}_j) \in \mathbf{V}$. Por la linealidad e inyectividad de $\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$ concluimos que $\tilde{\mathcal{B}}_1 := \{\tilde{\mathbf{v}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_n\}$ es linealmente independiente en $\mathbf{V}$, y por lo tanto una base. Por construcción, $C_{\tilde{\mathcal{B}}_1, \mathcal{B}} = C$. La existencia de $\tilde{\mathcal{B}}_2$ sigue aplicando el argumento anterior a C^{-1} . $\square$

Corolario 108. Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ espacios vectoriales de dimension finita sobre K y $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Sean $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ bases de $\mathbf{V}$ y $\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}}$ bases de $\mathbf{W}$. Entonces

$$\Phi_{\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{C}}}(f) = C_{\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}}} \cdot \Phi_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \cdot C_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}.$$

Definición 109. Dos matrices $A, B \in K^{n \times n}$ se llaman *equivalentes*, si existen matrices invertibles $C, D \in K^{n \times n}$ tal que

$$A = CBD.$$

En el contexto de Lema 107 y Corolario 108, matrices equivalentes representan la misma transformación lineal, usando diferentes bases.

Chapter 4

Espacios duales

Definición 110. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K . Una transformación lineal $f \in L(\mathbf{V}, K)$ se llama **funcional lineal**. El espacio vectorial $\mathbf{V}^* := L(\mathbf{V}, K)$ se llama **espacio dual** a $\mathbf{V}$.

Ejemplo 111. (i) La función $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x, y, z) = 4x - 5y + 2z$ es un funcional lineal $\varphi \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

(ii) Sea $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) \in K^n$. Entonces $\varphi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j \mathbf{w}_j$ es un funcional lineal $\varphi \in L(K^n, K)$.

(iii) La función $\varphi : \mathcal{P}_k(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(p) = 3p''(2) - 7p(5)$ es un funcional lineal $\varphi \in L(\mathcal{P}_k(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

(iv) Sea $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ base de $\mathbf{V}$ sobre K . Entonces $\mathbf{u}_j^* : \mathbf{V} \rightarrow K$ dado por $\mathbf{u}_j^*(\mathbf{v}) = \alpha_j$ para $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j$ es un funcional lineal $\mathbf{u}_j^* \in L(\mathbf{V}, K)$.

En el ejemplo (iv) vemos lo siguiente. Según Teorema 81 será suficiente definir $\mathbf{u}_j^*$ sobre la base $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ por $\mathbf{u}_j^*(\mathbf{u}_k) = \delta_{jk}$.

Lema 112. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K con $\dim(\mathbf{V}) = n$. Entonces $\dim(\mathbf{V}^*) = n$. En particular, sea $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ base de $\mathbf{V}$ sobre K . Para $j = 1, \dots, n$ sea $\mathbf{u}_j^* \in \mathbf{V}^*$ dado por $\mathbf{u}_j^*(\mathbf{u}_k) = \delta_{jk}$ para $k = 1, \dots, n$. Entonces $\{\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_n^*\}$ es una base de $\mathbf{V}^*$ y se llama **base dual**.

Proof. Según Teorema 88,

$$\dim(\mathbf{V}^*) = \dim(L(\mathbf{V}, K)) = \dim(\mathbf{V}) \cdot \dim(K) = n \cdot 1 = n.$$

Por lo tanto, es suficiente mostrar que $\{\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_n^*\}$ son linealmente independientes. Sean entonces $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tal que $\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j^* = \mathbf{0}_{\mathbf{V}^*}$. Es decir, para todo $k = 1, \dots, n$,

$$0 = \mathbf{0}_{\mathbf{V}^*}(\mathbf{u}_k) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j^*(\mathbf{u}_k) = \alpha_k.$$

□

Definición 113. Sea $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Entonces la función $f^* : \mathbf{W}^* \rightarrow \mathbf{V}^*$ dada por

$$f^*(\varphi) := \varphi \circ f$$

se llama **transformación transpuesta**.

Lema 114. Sea $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Entonces $f^* \in L(\mathbf{W}^*, \mathbf{V}^*)$.

Proof. Sean $\varphi, \psi \in \mathbf{W}^*$ y $\alpha \in K$. Entonces

$$f^*(\varphi + \alpha\psi) = (\varphi + \alpha\psi) \circ f = \varphi \circ f + \alpha\psi \circ f = f^*(\varphi) + \alpha f^*(\psi).$$

□

Ejemplo 115. Sea $D \in L(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_2)$ dado por $Dp := p'$. Sea $\varphi_1 \in \mathcal{P}_2^*$ dado por $\varphi_1(p) = p(3)$. Entonces $D^*(\varphi_1) \in \mathcal{P}_3^*$ actúa como

$$D^*(\varphi_1)(p) = \varphi_1 \circ D(p) = \varphi_1(p') = p'(3).$$

Por otro lado, sea $\varphi_2 \in \mathcal{P}_2^*$ dado por $\varphi_2(p) = \int_0^1 p(s) ds$. Entonces $D^*(\varphi_2) \in \mathcal{P}_3^*$ actúa como

$$D^*(\varphi_2)(p) = \varphi_2 \circ D(p) = \varphi_2(p') = p(1) - p(0).$$

Ya sabemos que si $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es una base de $\mathbf{V}$ y $f \in \mathbf{V}^*$ satisface $f(\mathbf{u}_j) = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$, entonces $f = \mathbf{0}_{\mathbf{V}^*}$. El próximo resultado dice que podemos intercambiar $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}^*$ en este argumento.

Lema 116. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K con $\dim(\mathbf{V}) = n$ y $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base de $\mathbf{V}$ con base dual $\{\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_n^*\}$. Entonces son equivalentes

$$(i) \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

$$(ii) \quad \mathbf{v}^*(\mathbf{v}) = 0 \text{ para todo } \mathbf{v}^* \in \mathbf{V}^*.$$

$$(iii) \quad \mathbf{u}_k^*(\mathbf{v}) = 0 \text{ para todo } k = 1, \dots, n.$$

Proof. Obviamente, $(i) \implies (ii) \implies (iii)$, y falta mostrar que $(iii) \implies (i)$. Escribimos $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j$, entonces

$$\mathbf{u}_k^*(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_k^*(\mathbf{u}_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_{jk} = \alpha_k.$$

Por lo tanto, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, es decir, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. □

Definición 117. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K .

(i) La función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathbf{V} \times \mathbf{V}^* & \rightarrow K \\ (\mathbf{v}, \mathbf{v}^*) & \mapsto \langle \mathbf{v}^*, \mathbf{v} \rangle := \mathbf{v}^*(\mathbf{v}) \end{cases}$$

se llama **combinación dual**.

(ii) El espacio dual $\mathbf{V}^{**}$ de $\mathbf{V}^*$ se llama **espacio bidual** a $\mathbf{V}$. Si $\mathbf{V}$ es de dimension finita, entonces $\mathbf{V} \simeq \mathbf{V}^* \simeq \mathbf{V}^{**}$. En particular, la función e dada por

$$e : \begin{cases} \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}^{**} \\ \mathbf{v} \mapsto (\mathbf{v}^* \mapsto \mathbf{v}^*(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}^* \rangle). \end{cases}$$

es inyectiva según Lema 116, y por lo tanto un isomorfismo.

Notamos que en el punto (ii) de la última definición, el isomorfismo $e : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}^*$ es **natural** en el sentido que no depende de ninguna base de $\mathbf{V}$ o $\mathbf{V}^*$.

Nuestro próximo objetivo es caracterizar $\ker(f^*)$ y $\text{img}(f^*)$ en terminos de $\ker(f)$ y $\text{img}(f)$.

Definición 118. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial y $\mathbf{V}^*$ su dual. Para un subconjunto $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}$ se define el **anihilador** de $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^\circ := \{\mathbf{v}^* \in \mathbf{V}^* \mid \langle \mathbf{v}^*, \mathbf{a} \rangle = 0 \text{ para todo } \mathbf{a} \in \mathbf{A}\}.$$

Ejemplo 119. Presentamos un par de ejemplos de anihiladores.

(a) $\mathbf{V}^\circ = \{\mathbf{0}_{\mathbf{V}^*}\}.$

(b) $\{\mathbf{0}_{\mathbf{V}}\}^\circ = \mathbf{V}^*.$

(c) Sea $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_5$ la base canónica de $\mathbb{R}^5$ y $\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_5^*$ la base dual de $(\mathbb{R}^5)^*$. Sea

$$\mathbf{U} = \text{span}(\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}).$$

Entonces $\mathbf{U}^\circ = \text{span}(\{\mathbf{e}_3^*, \mathbf{e}_4^*, \mathbf{e}_5^*\}).$

Primero verificamos que $\mathbf{U}^\circ \supset \text{span}(\{\mathbf{e}_3^*, \mathbf{e}_4^*, \mathbf{e}_5^*\})$. Sea $\mathbf{e}^* \in \text{span}(\{\mathbf{e}_3^*, \mathbf{e}_4^*, \mathbf{e}_5^*\})$, es decir

$$\mathbf{e}^* = \beta_3 \mathbf{e}_3^* + \beta_4 \mathbf{e}_4^* + \beta_5 \mathbf{e}_5^*.$$

Tenemos que mostrar que

$$0 = \langle \mathbf{e}^*, \mathbf{u} \rangle = \mathbf{e}^*(\mathbf{u}) \quad \text{para todo } \mathbf{u} \in \mathbf{U}.$$

Sea entonces $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, es decir $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2$. Calculamos

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^*(\mathbf{u}) &= \beta_3 \mathbf{e}_3^*(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2) + \beta_4 \mathbf{e}_4^*(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2) + \beta_5 \mathbf{e}_5^*(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2) \\ &= \beta_3 \alpha_1 \mathbf{e}_3^*(\mathbf{e}_1) + \beta_3 \alpha_2 \mathbf{e}_3^*(\mathbf{e}_2) + \beta_4 \alpha_1 \mathbf{e}_4^*(\mathbf{e}_1) + \beta_4 \alpha_2 \mathbf{e}_4^*(\mathbf{e}_2) + \beta_5 \alpha_1 \mathbf{e}_5^*(\mathbf{e}_1) + \beta_5 \alpha_2 \mathbf{e}_5^*(\mathbf{e}_2) = 0. \end{aligned}$$

Para mostrar que $\mathbf{U}^\circ \subset \text{span}(\{\mathbf{e}_3^*, \mathbf{e}_4^*, \mathbf{e}_5^*\})$, sea $\mathbf{e}^* \in \mathbf{U}^\circ$. Notamos que

$$\mathbf{e}^* = \beta_1 \mathbf{e}_1^* + \beta_2 \mathbf{e}_2^* + \beta_3 \mathbf{e}_3^* + \beta_4 \mathbf{e}_4^* + \beta_5 \mathbf{e}_5^*.$$

Dado que $\mathbf{e}_1 \in \mathbf{U}$, la condición $\mathbf{e}^* \in \mathbf{U}^\circ$ implica

$$0 = \mathbf{e}^*(\mathbf{e}_1) = \beta_1 \mathbf{e}_1^*(\mathbf{e}_1) + \beta_2 \mathbf{e}_2^*(\mathbf{e}_1) + \beta_3 \mathbf{e}_3^*(\mathbf{e}_1) + \beta_4 \mathbf{e}_4^*(\mathbf{e}_1) + \beta_5 \mathbf{e}_5^*(\mathbf{e}_1) = \beta_1.$$

El mismo argumento muestra $\beta_2 = 0$, así que $\mathbf{e}^* = \beta_3 \mathbf{e}_3^* + \beta_4 \mathbf{e}_4^* + \beta_5 \mathbf{e}_5^*$.

Lema 120. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial y $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}$. Entonces $\mathbf{A}^\circ \leq \mathbf{V}^*$.

Proof. Claramente, $\mathbf{0}_{\mathbf{V}^*} \in \mathbf{A}^\circ$. Sean $\varphi_1^*, \varphi_2^* \in \mathbf{A}^\circ$ y $\alpha \in K$, entonces para todo $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$

$$(\varphi_1^* + \alpha \varphi_2^*)(\mathbf{a}) = \varphi_1^*(\mathbf{a}) + \alpha \varphi_2^*(\mathbf{a}) = 0.$$

Por lo tanto, $\mathbf{A}^\circ \leq \mathbf{V}^*$. □

Lema 121. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial con $\dim(\mathbf{V}) = n$ y $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$. Entonces

$$\dim(\mathbf{U}) + \dim(\mathbf{U}^\circ) = \dim(\mathbf{V}).$$

En particular, si $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es base de $\mathbf{V}$ y $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ es base de $\mathbf{U}$, entonces $\{\mathbf{u}_{m+1}^*, \dots, \mathbf{u}_n^*\}$ es base de $\mathbf{U}^\circ$.

Proof. Es suficiente demostrar la segunda parte del Lema, pues implica la primera. Sea entonces $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es base de $\mathbf{V}$ y $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ es base de $\mathbf{U}$. Primero notamos que para $k = 1, \dots, m$ y $j = m+1, \dots, n$,

$$\langle \mathbf{u}_j^*, \mathbf{u}_k \rangle = \mathbf{u}_j^*(\mathbf{u}_k) = 0,$$

o sea $\mathbf{u}_j^* \in \mathbf{U}^\circ$. Dado que $\{\mathbf{u}_{m+1}^*, \dots, \mathbf{u}_n^*\}$ es un subconjunto de la base dual, automáticamente es linealmente independiente. Falta mostrar que genera $\mathbf{U}^\circ$. Un elemento $\mathbf{u}^* \in \mathbf{V}^*$ tiene la representación

$$\mathbf{u}^* = \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{u}_j^*.$$

Sea $\mathbf{u}^* \in \mathbf{U}^\circ$, es decir $\mathbf{u}^*(\mathbf{u}) = 0$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$. En particular, $\mathbf{u}^*(\mathbf{u}_k) = 0$ para todo $k = 1, \dots, m$. Por lo tanto, $\beta_1 = \dots = \beta_m = 0$. □

Lema 122. Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ espacios vectoriales de dimension finita sobre K y $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Entonces

$$(i) \ker(f^*) = \text{img}(f)^\circ,$$

$$(ii) \dim(\ker(f^*)) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathbf{W}) - \dim(\mathbf{V}).$$

Proof. Para mostrar (i), supongamos $\mathbf{w}^* \in \ker(f^*)$. Es decir, $f^*(\mathbf{w}^*) = \mathbf{w}^* \circ f = \mathbf{0}_{\mathbf{V}^*}$. Por lo tanto,

$$0 = f^*(\mathbf{w}^*)(\mathbf{v}) = \mathbf{w}^*(f(\mathbf{v})) \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in \mathbf{V},$$

lo que significa $\mathbf{w}^* \in \text{img}(f)^\circ$. Concluimos entonces que $\ker(f^*) \subset \text{img}(f)^\circ$. Por otro lado, sea $\mathbf{w}^* \in (\text{img}(f))^\circ$, o sea

$$0 = \mathbf{w}^*(f(\mathbf{v})) = f^*(\mathbf{w}^*)(\mathbf{v}) \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in \mathbf{V},$$

lo que significa $f^*(\mathbf{w}^*) = \mathbf{0}_{\mathbf{V}^*}$, o sea $\mathbf{w}^* \in \ker(f^*)$.

Para mostrar (ii), usamos (i), la formula de dimensiones, y Lema 121,

$$\dim(\mathbf{W}) = \dim(\text{img}(f)^\circ) + \dim(\text{img}(f)) = \dim(\ker(f^*)) - \dim(\ker(f)) + \dim(\mathbf{V}).$$

□

Corolario 123. Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ espacios vectoriales de dimension finita sobre K y $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Entonces f es sobreyectiva si y solo si f^* es inyectiva.

Proof. Notamos que f es sobreyectiva si y solo si $\text{img}(f) = \mathbf{W}$. Según Lema 121, $\text{img}(f) = \mathbf{W}$ si y solo si $\text{img}(f)^\circ = \{\mathbf{0}_{\mathbf{W}^*}\}$, o sea $\ker(f^*) = \{\mathbf{0}_{\mathbf{W}^*}\}$ por Lema 122. Dado que f^* es lineal, eso es equivalente a f^* inyectiva. □

Lema 124. Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ espacios vectoriales de dimension finita sobre K y $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Entonces

$$(i) \text{img}(f^*) = \ker(f)^\circ,$$

$$(ii) \dim(\text{img}(f^*)) = \dim(\text{img}(f)).$$

Proof. Primero mostramos (ii). Notamos

$$\dim(\text{img}(f^*)) = \dim(\mathbf{W}^*) - \dim(\ker(f^*)) = \dim(\mathbf{W}) - \dim(\text{img}(f)^\circ) = \dim(\text{img}(f)),$$

donde usamos la formula de la dimension, el Lema 122, y Lema 121. Para mostrar (i), supongamos $\mathbf{v}^* \in \text{img}(f^*)$. Entonces existe $\mathbf{w}^* \in \mathbf{W}^*$ tal que $\mathbf{v}^* = f^*(\mathbf{w}^*)$. Sea $\mathbf{v} \in \ker(f)$, entonces

$$\langle \mathbf{v}^*, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^*(\mathbf{v}) = f^*(\mathbf{w}^*)(\mathbf{v}) = \mathbf{w}^*(f(\mathbf{v})) = \mathbf{w}^*(\mathbf{0}_{\mathbf{W}}) = 0,$$

o sea $\mathbf{v}^* \in \ker(f)^\circ$. Concluimos $\text{img}(f^*) \subset \ker(f)^\circ$. Además, por (ii),

$$\dim(\text{img}(f^*)) = \dim(\text{img}(f)) = \dim(\mathbf{V}) - \dim(\ker(f)) = \dim(\ker(f)^\circ),$$

asi que $\text{img}(f^*) = \ker(f)^\circ$. □

Corolario 125. Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ espacios vectoriales de dimension finita sobre K y $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Entonces f es inyectiva si y solo si f^* es sobreyectiva.

Proof. Notamos que f es inyectiva si y solo si $\ker(f) = \{\mathbf{0}_{\mathbf{V}}\}$. Según Lema 121, $\ker(f) = \{\mathbf{0}_{\mathbf{V}}\}$ si y solo si $\ker(f)^\circ = \mathbf{V}^*$, o sea $\text{img}(f^*) = \mathbf{V}^*$ por Lema 124. $\square$

Teorema 126. Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ espacios vectoriales de dimension finita sobre K y $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Sean $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ bases de $\mathbf{V}, \mathbf{W}$, y $\mathcal{B}^*, \mathcal{C}^*$ las bases duales de $\mathbf{V}^*, \mathbf{W}^*$. Entonces

$$\Phi_{\mathcal{C}^*, \mathcal{B}^*}(f^*) = \Phi_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)^\top.$$

Proof. Sea $\dim(\mathbf{V}) = n$ y $\dim(\mathbf{W}) = m$, y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$, $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m\}$. Sean $A = \Phi_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$, $B = \Phi_{\mathcal{C}^*, \mathcal{B}^*}(f^*)$. Para $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq n$ tenemos

$$f^*(\mathbf{c}_j^*) = \sum_{r=1}^n B_{r,j} \mathbf{b}_r^*.$$

Aplicandola última identidad a $\mathbf{b}_k$ obtenemos

$$B_{k,j} = \sum_{r=1}^n B_{r,j} \mathbf{b}_r^*(\mathbf{b}_k) = f^*(\mathbf{c}_j^*)(\mathbf{b}_k) = \mathbf{c}_j^*(f(\mathbf{b}_k)) = \mathbf{c}_j^*\left(\sum_{r=1}^m A_{r,k} \mathbf{c}_r\right) = \sum_{r=1}^m A_{r,k} \mathbf{c}_j^*(\mathbf{c}_r) = A_{j,k}.$$

$\square$

Chapter 5

Valores y vectores propios

Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimension finita n . Usaremos la notación $L(\mathbf{V}) := L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$. Sea $f \in L(\mathbf{V})$. Para analizar f , podrían ser útiles las siguientes ideas.

- (1) Escribir

$$\mathbf{V} = \bigoplus_{j=1}^k \mathbf{U}_k \quad (5.1)$$

con subespacios $\mathbf{U}_k$, y analizar f restringido a $\mathbf{U}_k$, es decir $f|_{\mathbf{U}_k}$, pues los $\mathbf{U}_k$ tendrán dimensiones menores que $\mathbf{V}$. El problema es que en general $f(\mathbf{U}_k) \not\subseteq \mathbf{U}_k$, o sea no podemos entender f como una transformación lineal $f : \mathbf{U}_k \rightarrow \mathbf{U}_k$. La pregunta entonces es ¿existen subespacios $\mathbf{U}_k$ con $f(\mathbf{U}_k) \subseteq \mathbf{U}_k$ y (5.1)?

- (2) Encontrar una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ de $\mathbf{V}$ tal que la matriz $\Phi_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$ tiene una forma sencilla,

$$\Phi_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Notamos que en este caso, $f(\mathbf{b}_j) = \lambda_j \mathbf{b}_j$. En otras palabras, el conjunto $\mathbf{U}_j := \{\alpha \mathbf{b}_j \mid \alpha \in K\}$ es un subespacios de $\mathbf{V}$ y cumple con $f(\mathbf{U}_j) \subseteq \mathbf{U}_j$.

Definición 127. Sea $f \in L(\mathbf{V})$. Un subespacio $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$ se llama *invariante* bajo f , si $f(\mathbf{U}) \subseteq \mathbf{U}$.

Ejemplo 128 (subespacios invariantes triviales). Los subespacios $\mathbf{V}$, $\{\mathbf{0}_{\mathbf{V}}\}$, $\ker(f)$, $\text{img}(f)$ son invariantes bajo f .

Definición 129. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K . Sea $f \in L(\mathbf{V})$. Un elemento $\lambda \in K$ se llama **valor propio**¹, si existe $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ tal que $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$. El conjunto de todos los valores propios de f se llama el **espectro** de f ,

$$\sigma(f) := \{\lambda \in K \mid \lambda \text{ es valor propio de } f\}.$$

Ejemplo 130. (i) Sea $f \in L(\mathbb{R}^2)$ dado por $f(x, y) = (-y, x)$. Para que $\lambda \in \mathbb{R}$ sea un valor propio, tenemos que encontrar $(0, 0) \neq (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$(-y, x) = f(x, y) = \lambda(x, y),$$

o sea $-y = \lambda x = \lambda^2 y$ y $x = \lambda y = -\lambda^2 x$. Obviamente existen $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(0, 0) \neq (x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen esta propiedad. Concluimos que $f \in L(\mathbb{R}^2)$ no tiene valores propios.

(ii) Sea $f \in L(\mathbb{C}^2)$ dado por $f(x, y) = (-y, x)$. Para que $\lambda \in \mathbb{C}$ sea un valor propio, tenemos que encontrar $(0, 0) \neq (x, y) \in \mathbb{C}^2$ tal que

$$(-y, x) = f(x, y) = \lambda(x, y),$$

o sea $-y = \lambda x = \lambda^2 y$ y $x = \lambda y = -\lambda^2 x$. Obtenemos que los valores propios satisfacen $\lambda^2 = -1$. Esta última ecuación tiene dos soluciones $\lambda_1 = \mathbf{i}$ y $\lambda_2 = -\mathbf{i}$. Vemos que todos los vectores $(w, -\mathbf{i}w)$ con $w \in \mathbb{C}$ satisfacen $f(w, -\mathbf{i}w) = \lambda_1(w, -\mathbf{i}w)$, mientras todos los vectores $(w, \mathbf{i}w)$ con $w \in \mathbb{C}$ satisfacen $f(w, \mathbf{i}w) = \lambda_2(w, \mathbf{i}w)$,

Lema 131 (Valores propios). Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimension finita sobre K y $f \in L(\mathbf{V})$. Para $\lambda \in K$, los siguientes puntos son equivalentes.

- (i) $\lambda \in \sigma(f)$,
- (ii) $f - \lambda \text{id}$ no es inyectiva,
- (iii) $f - \lambda \text{id}$ no es sobreyectiva,
- (iv) $f - \lambda \text{id}$ no es biyectiva.

Arriba, $\text{id} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ es la identidad.

Proof. Notamos que $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ significa $(f - \lambda \text{id})(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. El punto (i) es por definición equivalente a (ii). $\square$

Definición 132. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K , $f \in L(\mathbf{V})$ y $\lambda \in \sigma(f)$. Un vector $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ con $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ se llama **vector propio** de f asociado a λ . Definimos el conjunto

$$\mathbf{V}_\lambda(f) := \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \text{ es vector propio de } f \text{ asociado a } \lambda\} \cup \{\mathbf{0}\}$$

y notamos que $\mathbf{V}_\lambda(f) \neq \{\mathbf{0}\}$. El conjunto $\mathbf{V}_\lambda(f)$ se llama **espacio propio**.

¹eigenvalue en inglés

El siguiente resultado muestra que $\mathbf{V}_\lambda$ efectivamente es un espacio.

Lema 133 (Espacio propio). *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K . Sea $f \in L(\mathbf{V})$ y $\lambda \in \sigma(f)$. Entonces $\mathbf{V}_\lambda(f) \leq \mathbf{V}$, y es invariante bajo f .*

Lema 134. *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K y $f \in L(\mathbf{V})$. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \sigma(f)$ mutuamente distintos, y $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ vectores propios asociados. Entonces $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ son linealmente independientes.*

Proof. Vamos a mostrar el resultado por contradicción: Sean $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ linealmente dependientes. Aplicando Lema 55, sea $k \in \mathbb{N}$ el número mas pequeño tal que $\mathbf{v}_k = \text{span}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\})$. En particular, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$ son linealmente independientes. Es decir, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \in K$ tal que

$$\mathbf{v}_k = \alpha_1 \mathbf{v}_1 \oplus \dots \oplus \alpha_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}. \quad (5.2)$$

Aplicamos f a la última ecuación y obtenemos

$$\lambda_k \mathbf{v}_k = \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 \oplus \dots \oplus \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}. \quad (5.3)$$

Ahora multiplicamos (5.2) con λ_k y restamos (5.3) para obtener

$$\mathbf{0} = \alpha_1(\lambda_k - \lambda_1) \mathbf{v}_1 \oplus \dots \oplus \alpha_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1}) \mathbf{v}_{k-1}.$$

Dado que $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$ son linealmente independientes, obtenemos

$$\alpha_1(\lambda_k - \lambda_1) = \dots = \alpha_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1}) = 0.$$

Dado que $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \sigma(f)$ son mutuamente distintos, obtenemos $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$, y por (5.2) $\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, lo que contradice el hecho que $\mathbf{v}_k$ sea un vector propio. $\square$

El último resultado tiene una consecuencias importante.

Corolario 135. *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimension finita $\dim(\mathbf{V}) = n$ sobre K y $f \in L(\mathbf{V})$. Entonces f tiene como mucho n valores propios distintos.*

Definición 136. *Sea $A \in K^{n \times n}$. Un elemento $\lambda \in K$ se llama **valor propio** de A , si existe un vector $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in K^{n \times 1}$ tal que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. El conjunto*

$$\sigma(A) := \{\lambda \in K \mid \lambda \text{ es valor propio de } A\}$$

se llama el espectro de A . Definimos el conjunto

$$\mathbf{V}_\lambda(A) := \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \text{ es vector propio de } A \text{ asociado a } \lambda\} \cup \{\mathbf{0}\}$$

Lema 137. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimension finita $\dim(\mathbf{V}) = n$ sobre K y $f \in L(\mathbf{V})$. Sea $\mathcal{B}$ base de $\mathbf{V}$. Entonces $\lambda \in \sigma(f)$ y $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\lambda(f)$, si y solo si

$$\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = \lambda\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}).$$

Es decir, $\lambda \in \sigma(f)$ y $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\lambda(f)$ si y solo si $\lambda \in \sigma(\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}})$ y $\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) \in \mathbf{V}_\lambda(\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}})$

Proof. Por definición,

$$f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}.$$

Aplicamos la representación en coordenadas $\varphi_{\mathcal{B}}$, Lema 104 (ii), y la linealidad de $\varphi_{\mathcal{B}}$,

$$\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = \varphi_{\mathcal{B}}(f(\mathbf{V})) = \varphi_{\mathcal{B}}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{V}).$$

□

Recordamos el Comentario 103: Una matriz $A \in K^{n \times n}$ genera una transformación lineal $f_A : K^{n \times 1} \rightarrow K^{n \times 1}$ a traves de

$$f_A(\mathbf{v}) = A \cdot \mathbf{v}.$$

Si usamos la base canonica $\mathcal{E}_n$ para $K^{n \times 1}$, entonces

$$A_{\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_n}^{f_A} = A.$$

Obtenemos de inmediato lo siguiente.

Lema 138. Si $A \in K^{n \times n}$, entonces son equivalentes

- (i) $\lambda \in \sigma(A)$
- (ii) $\lambda \in \sigma(f_A)$
- (iii) $\text{rango}(A - \lambda E_n) < n$
- (iv) $A - \lambda E_n$ no es inyectiva
- (v) $A - \lambda E_n$ no es sobreyectiva
- (vi) $A - \lambda E_n$ no es biyectiva
- (vii) $\det(A - \lambda E_n) = 0$

Ejemplo 139. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Para buscar los valores propios de A , intentaremos encontrar $\lambda, (x, y) \neq (0, 0)$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)x + y &= 0, \\ 4x + (1 - \lambda)y &= 0, \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} -\frac{(1 - \lambda)^2}{4}y + y &= 0, \\ 4x - (1 - \lambda)^2x &= 0. \end{aligned}$$

Si $(x, y) \neq (0, 0)$, entonces

$$(1 - \lambda)^2 = 4,$$

o sea $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$. Para encontrar $\mathbf{V}_{-1}(A)$ resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y obtenemos

$$\mathbf{V}_{-1}(A) = \{(x, -2x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Para encontrar $\mathbf{V}_3(A)$ resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y obtenemos

$$\mathbf{V}_3(A) = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Consideramos ahora la pregunta si $f \in L(\mathbf{V})$ tiene un valor propio.

Definición 140. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Para $f \in L(\mathbf{V})$ y $m \in \mathbb{N}$ se define $f^m \in L(\mathbf{V})$ como

$$f^m := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{m \text{ veces}},$$

y $f^0 := \text{id}$. Si f es biyectiva, entonces se define $f^{-m} = (f^{-1})^m$. Notamos que $f^m \circ f^n = f^{m+n}$ y $(f^m)^n = f^{mn}$. Si p es un polinomio de grado n en $\mathbb{C}$, $p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$, entonces se define $p(f) \in L(\mathbf{V})$ como $p(f) := a_0f^0 + a_1f + \cdots + a_nf^n$.

En lo que sigue, usaremos el **Teorema fundamental del álgebra**: Cada polinomio no constante de grado n en $\mathbb{C}$ tiene $1 \leq m \leq n$ raíces, contando con multiplicidad. En otras palabras, cada polinomio no constante de grado n en $\mathbb{C}$ puede escribirse como

$$p(z) = c(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m) \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C},$$

donde $c, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$. Notamos que en este caso

$$p(f) = c(f - \lambda_1 \text{id}) \circ \cdots \circ (f - \lambda_m \text{id}).$$

Teorema 141. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimension finita $\dim(\mathbf{V}) = n > 1$. Sea $f \in L(\mathbf{V})$. Entonces f tiene un valor propio.

Proof. Sea $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Entonces, los $n + 1$ vectores

$$\mathbf{v}, f(\mathbf{v}), f^2(\mathbf{v}), \dots, f^n(\mathbf{v})$$

no son linealmente independientes. Por lo tanto, existen $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, no todos iguales a 0, tal que

$$\mathbf{0} = \alpha_0\mathbf{v} \oplus \alpha_1f(\mathbf{v}) \oplus \cdots \oplus \alpha_nf^n(\mathbf{v}).$$

Notamos que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ no todos iguales a 0, pues en el caso contrario $\mathbf{0} = \alpha_0\mathbf{v}$, lo que implicaría $\alpha_0 = 0$. Por lo tanto, el polinomio $\alpha_0 + \alpha_1z + \cdots + \alpha_nz^n$ no es constante, y usando el Teorema fundamental del álgebra podemos escribir

$$\alpha_0 + \alpha_1z + \cdots + \alpha_nz^n = c(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m) \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Notamos que $c \neq 0$, pues en el caso contrario $\alpha_0 = \cdots = \alpha_n = 0$. Calculamos

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \alpha_0\mathbf{v} \oplus \alpha_1f(\mathbf{v}) \oplus \cdots \oplus \alpha_nf^n(\mathbf{v}) \\ &= (\alpha_0f^0 + \alpha_1f + \cdots + \alpha_nf^n)(\mathbf{v}) \\ &= c(f - \lambda_1) \circ \cdots \circ (f - \lambda_m)(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

lo que implica que $f - \lambda_j \text{id}$ no es inyectiva para algún j . Según Lema 131, $\lambda_j \in \sigma(f)$. □

5.1 Diagonalización

Otra consecuencia de Lema 134 es lo siguiente.

Corolario 142. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimension finita $\dim(\mathbf{V}) = n$ sobre K y $f \in L(\mathbf{V})$. Entonces la suma $\sum_{\lambda \in \sigma(f)} \mathbf{V}_\lambda(f)$ es directa,

$$\sum_{\lambda \in \sigma(f)} \mathbf{V}_\lambda(f) = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(f)} \mathbf{V}_\lambda(f).$$

En particular,

$$\sum_{\lambda \in \sigma(f)} \dim(\mathbf{V}_\lambda) \leq \dim(\mathbf{V}).$$

Definición 143. Una matriz $A \in K^{n \times n}$ se llama **diagonal**, si $a_{jk} = 0$ para $j \neq k$, o sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

y se llama **triangular superior** si $a_{jk} = 0$ para $j > k$, o sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Definición 144. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimension finita $\dim(\mathbf{V}) = N$. Una transformación lineal $f \in L(\mathbf{V})$ se llama **diagonalizable**, si existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$ tal que $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ es diagonal. Una transformación lineal $f \in L(\mathbf{V})$ se llama **triangularizable**, si existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$ tal que $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ es triangular superior.

Sin demostración mencionamos lo siguiente.

Teorema 145. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimension finita $\dim(\mathbf{V}) = n > 1$. Sea $f \in L(\mathbf{V})$. Si existe una base $\mathcal{B}$ tal que $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ es triangular superior, entonces los valores propios de f son precisamente los valores en la diagonal de $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$. Si $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, entonces cada $f \in L(\mathbf{V})$ es triangularizable.

El último resultado dice que cada transformación lineal sobre un espacio sobre $\mathbb{C}$ es triangularizable. Sin embargo, no todas las transformaciones lineales son diagonalizables.

Teorema 146. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimension finita $\dim(\mathbf{V}) = n$ sobre K y $f \in L(\mathbf{V})$. Entonces son equivalentes los siguientes puntos:

- (i) f es diagonalizable
- (ii) existe una base de $\mathbf{V}$ de vectores propios de f
- (iii) $\mathbf{V} = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(f)} \mathbf{V}_\lambda(f)$
- (iv) $\dim(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \dim(\mathbf{V}_\lambda)$

Proof. Notamos que f diagonalizable con respecto a una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ significa

$$\Phi_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dado que la j -ésima columna de $\Phi_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$ es $\varphi_{\mathcal{B}}(f(\mathbf{b}_j))$, concluimos que ser diagonalizable es equivalente a $f(\mathbf{b}_j) = \lambda_j \mathbf{b}_j$ para todo $j = 1, \dots, n$. Es decir, (i) y (ii) son equivalentes. Obviamente, (iii) y (iv) son equivalentes. Por último, notamos que (ii) y (iii) son equivalentes. $\square$

Ejemplo 147. La transformación lineal $f \in L(\mathbb{C}^2)$ dada por $f(w, z) = (z, 0)$ no es diagonalizable: el único valor propio es 0, y $\mathbf{V}_0(f) = \{(w, 0) \in \mathbb{C}^2 \mid w \in \mathbb{C}\}$.

Lema 148. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita $\dim(\mathbf{V}) = n$ sobre K y $f \in L(\mathbf{V})$. Si f tiene n valores propios distintos, entonces f es diagonalizable.

Proof. Sean $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vectores propios. Según Lema 134, son linealmente independientes. Según Corolario 71, son una base. $\square$

Notamos que el último lema establece una implicación. La implicación contraria es falsa en general como se puede ver considerando la identidad.

Definición 149. Dos matrices $A, B \in K^{n \times n}$ se llaman **semejantes** si existe una matriz regular $T \in K^{n \times n}$ tal que

$$B = T^{-1}AT.$$

Una matriz $A \in K^{n \times n}$ se llama **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal.

Notamos que si A es diagonalizable, entonces existe una matriz diagonal D tal que

$$TD = AT,$$

o sea los elementos en la diagonal de D son los valores propios de A , y las columnas de T son los vectores propios. Del Lema 137 obtenemos de inmediato lo siguiente.

Corolario 150. Tenemos lo siguiente.

- (i) Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita $\dim(\mathbf{V}) = n$ sobre K y $f \in L(\mathbf{V})$. Entonces $\mathbf{V}$ es diagonalizable (con base $\mathcal{B}$) si y solo si $\varphi_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$ es diagonalizable.
- (ii) Una matriz $A \in K^{n \times n}$ es diagonalizable si y solo si f_A es diagonalizable.

5.2 El teorema de Cayley-Hamilton

Definición 151. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial, $f \in L(\mathbf{V})$, y $\lambda \in \sigma(f)$. Un vector $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ se llama **vector propio generalizado** de f asociado a λ , si

$$(f - \lambda \text{id})^j \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

para algún $j \in \mathbb{N}$. Definimos el conjunto

$$\tilde{\mathbf{V}}_\lambda(f) := \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \text{ es vector propio generalizado de } f \text{ asociado a } \lambda\} \cup \{\mathbf{0}\}.$$

Notamos que $\mathbf{V}_\lambda(f) \subseteq \tilde{\mathbf{V}}_\lambda(f)$.

Como en el Lema 134 se puede mostrar lo siguiente.

Lema 152. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K y $f \in L(\mathbf{V})$. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \sigma(f)$ mutuamente distintos, y $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ vectores propios generalizados asociados. Entonces $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ son linealmente independientes.

Lema 153. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial y $f \in L(\mathbf{V})$.

(i) Se tiene

$$\{\mathbf{0}\} = \ker(f^0) \subseteq \ker(f^1) \subseteq \ker(f^2) \subseteq \dots$$

(ii) Si $\ker(f^m) = \ker(f^{m+1})$, entonces $\ker(f^m) = \ker(f^{m+k})$ para $k \in \mathbb{N}$.

(iii) Si $\dim(\mathbf{V}) = n$, entonces $\ker(f^n) = \ker(f^{n+k})$ para $k \in \mathbb{N}$.

(iv) Si $\dim(\mathbf{V}) = n$, entonces

$$\mathbf{V} = \ker(f^n) \oplus \text{img}(f^n)$$

es una suma directa.

Proof. Para mostrar (i), notamos primero que $f^0 = \text{id}$, y $\ker(\text{id}) = \{\mathbf{0}\}$. Si $\mathbf{v} \in \ker(f^k)$, entonces $f^k(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, y concluimos $f^{k+1}(\mathbf{v}) = f(f^k(\mathbf{v})) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, pues f es lineal. Es decir, $\mathbf{v} \in \ker(f^{k+1})$.

Para mostrar (ii), supongamos que $\ker(f^m) = \ker(f^{m+1})$, y mostraremos que $\ker(f^{m+\ell}) = \ker(f^{m+\ell+1})$ para todo $\ell \in \mathbb{N}_0$. El primer punto (i) ya establece $\ker(f^{m+\ell}) \subseteq \ker(f^{m+\ell+1})$, así que falta mostrar que $\ker(f^{m+\ell}) \supseteq \ker(f^{m+\ell+1})$. Sea $\mathbf{v} \in \ker(f^{m+\ell+1})$. Entonces

$$\mathbf{0} = f^{m+\ell+1}(\mathbf{v}) = f^{m+1}(f^\ell(\mathbf{v})),$$

es decir $f^\ell(\mathbf{v}) \in \ker(f^{m+1})$. El hipotesis implica entonces $f^\ell(\mathbf{v}) \in \ker(f^m)$, o sea $\mathbf{v} \in \ker(f^{m+\ell})$. $\square$

Lema 154. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial con $\dim(\mathbf{V}) = n$ y $\lambda \in \sigma(f)$. Entonces

$$\tilde{\mathbf{V}}_\lambda(f) = \ker((f - \lambda \text{id})^n).$$

Proof. Por definición, $\tilde{\mathbf{V}}_\lambda(f) \supseteq \ker((f - \lambda \text{id})^n)$. Por otro lado, supongamos que $\mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{V}}_\lambda(f)$, o sea $(f - \lambda \text{id})^j \mathbf{v} = \mathbf{0}$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Del Lema 153 aplicado a $f - \lambda \text{id}$ obtenemos $(f - \lambda \text{id})^n \mathbf{v} = \mathbf{0}$. $\square$

Ahora podemos mostrar que un espacio vectorial de dimension finita sobre $\mathbb{C}$ siempre es una suma directa de espacios propios generalizados.

Teorema 155. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con $\dim(\mathbf{V}) = n$, $f \in L(\mathbf{V})$, y $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \sigma(f)$ todos los valores propios distintos de f . Entonces

$$\mathbf{V} = \bigoplus_{j=1}^m \tilde{\mathbf{V}}_{\lambda_j}(f).$$

Definición 156. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, $f \in L(\mathbf{V})$, y $\lambda \in \sigma(f)$. Entonces el número

$$\dim \mathbf{V}_\lambda(f)$$

se llama **multiplicidad geométrica** de λ , y el número

$$\dim \tilde{\mathbf{V}}_\lambda(f)$$

se llama **multiplicidad algebraica** de λ . En particular,

$$\dim \mathbf{V} = \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \dim \tilde{\mathbf{V}}_\lambda(f).$$

Definición 157. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimension finita sobre $\mathbb{C}$ y $f \in L(\mathbf{V})$. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ los valores propios distintos de f y $d_1, \dots, d_m$ las multiplicidades algebraicas asociadas. Entonces, el polinomio

$$p_f(z) = (z - \lambda_1)^{d_1} \cdots (z - \lambda_m)^{d_m}$$

se llama **polinomio característico** de f . El polinomio característico es de grado $\dim(\mathbf{V})$, y sus raíces son los valores propio de f . $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbf{V}$, entonces

$$p_f(z) = \det(zE_n - \Phi_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)).$$

Ejemplo 158. Sea $f \in L(\mathbb{C}^3)$ dada por

$$f(z_1, z_2, z_3) = (6z_1 + 3z_2 + 4z_3, 6z_2 + 2z_3, 7z_3).$$

Con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$,

$$\Phi_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

es decir 6 y 7 son los valores propios de f . El polinomio característico de f es

$$p_f(z) = (z - 6)^2(z - 7)$$

Teorema 159 (Cayley-Hamilton). *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimension finita sobre $\mathbb{C}$, $f \in L(\mathbf{V})$, y p_f su polinomio característico. Entonces*

$$p(f) = \mathbf{0}_{L(\mathbf{V})}.$$

5.3 La forma de Jordan

Lema 160. *Semejanza es una relación de equivalencia sobre $K^{n \times n}$.*

En particular, podemos particionar $K^{n \times n}$ en clases de equivalencia según semejanza. Por ejemplo, las dos matrices de $\mathbb{C}^{2 \times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

tienen los mismos valores propios, pero la segunda matriz no es diagonalizable, pues

$$\mathbf{V}_4(B) = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{C}\}.$$

En particular, A y B no son elementos de la misma clase de equivalencia.

Teorema 161 (Jordan). *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimension finita sobre $\mathbb{C}$, $f \in L(\mathbf{V})$. Entonces existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$ tal que*

$$\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix},$$

donde cada A_j tiene la forma de un bloque de Jordan, es decir

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ 0 & \dots & & & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

La multiplicidad geométrica de un valor propio es el número de bloques de Jordan asociado al valor propio, y la multiplicidad algebraica es la suma de los tamaños de los bloques de Jordan asociados al valor propio. La forma de Jordan es única modulo el orden de los bloques de Jordan.

Si una matriz es diagonalizable si y solo si las multiplicidades geométricas y algebraicas coinciden. En este caso, todos los bloques de Jordan son 1×1 .

Ejemplo 162. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es

$$p_A(z) = (z - 1)(z - 2)(z - 4)^2.$$

Por lo tanto, 1 es valor propio con multiplicidad algebraica 1, 2 es valor propio con multiplicidad algebraica 1, y 4 es valor propio con multiplicidad algebraica 2. Se puede calcular que

$$\mathbf{V}_1 = \text{span} \{(-1, 1, 0, 0)\},$$

$$\mathbf{V}_2 = \text{span} \{(1, -1, 0, 1)\},$$

$$\mathbf{V}_4 = \text{span} \{(1, 0, -1, 1)\}.$$

Por lo tanto, la forma de Jordan de A es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Chapter 6

Espacios con producto interno

En este capítulo, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Además, para $x \in K$ anotamos con $\bar{x}$ el conjugado de x , es decir, $\overline{a + ib} = a - ib$. En particular, $\bar{x} = x$ para $x \in \mathbb{R}$.

Definición 163. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K . Una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow K$ se llama **producto interno** o **producto escalar** si

- (i) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$
- (ii) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$,
- (iii) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ si y solo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$,
- (iv) $\langle \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$,
- (v) $\langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ para todo $\lambda \in K, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Un espacio vectorial $\mathbf{V}$ dotado de un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se llama **espacio producto interno**, $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Notamos que en la última definición, el punto (ii) tiene sentido, pues de (i) se concluye $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 164. Presentamos un par de ejemplos de productos internos.

- (i) Para $\mathbf{V} = K^n$, la función

$$\langle (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n), (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \rangle = \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j \overline{\mathbf{v}_j}$$

es un producto interno, y se llama **producto interno Euclidiano** o **producto punto**. Si $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ números positivos,

$$\langle (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n), (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \rangle = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{u}_j \overline{\mathbf{v}_j}$$

es un producto interno, y se llama **producto interno Euclidiano ponderado**.

(ii) Si $\mathbf{V}$ es el espacio de funciones reales y continuas sobre $[-1, 1]$, entonces

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$$

Lema 165 (Propiedades básicas). Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno. Entonces se tiene lo siguiente.

- (i) Para $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ fijo, la función $\mathbf{v} \mapsto \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ es un funcional lineal.
- (ii) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$.
- (iii) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \oplus \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$.
- (iv) $\langle \mathbf{u}, \lambda \mathbf{v} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ para todo $\lambda \in K$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.
- (v) $\langle \mathbf{u} \ominus \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$.

Proof. tbc □

Un producto interno nos permite definir una norma.

Definición 166. Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno. Entonces la función $\| \cdot \| : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\| \mathbf{v} \| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

se llama **norma**, y $\| \mathbf{v} \|$ se llama **norma de $\mathbf{v}$** .

Ejemplo 167. La **norma Euclidiana** es

$$\| (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |\mathbf{v}_j|^2}.$$

Lema 168 (Propiedades básicas de normas). Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno. Entonces se tiene lo siguiente.

- (i) $\| \mathbf{v} \| = 0$ si y solo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- (ii) $\| \lambda \mathbf{v} \| = |\lambda| \| \mathbf{v} \|$ para todo $\lambda \in K$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Proof. tbc □

Definición 169. Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Se dice que $\mathbf{u}$ es **ortogonal** a $\mathbf{v}$, si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Notamos que si $\mathbf{u}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$, entonces

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} = \overline{0} = 0,$$

es decir, $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$. Por lo tanto, vamos a decir que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.

Lema 170 (Propiedades básicas de ortogonalidad). *Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno. Entonces $\mathbf{0}$ es ortogonal a todos los vectores. Además, $\mathbf{0}$ es el único vector ortogonal a sí mismo.*

Proof. tbc □

Teorema 171 (Pítagoras). *Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno y $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ortogonales. Entonces*

$$\|\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Proof. tbc □

Supongamos que $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Nuestro objetivo es escribir $\mathbf{u}$ como una suma de un múltiplo de $\mathbf{v}$ y un vector ortogonal a $\mathbf{v}$. Es decir,

$$\mathbf{u} = c\mathbf{v} \oplus (\mathbf{u} \ominus c\mathbf{v}),$$

donde

$$0 = \langle \mathbf{u} \ominus c\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - c\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle.$$

Concluimos entonces que

$$c = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}.$$

Corolario 172. *Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno y $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Sea*

$$c := \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}.$$

Entonces el vector $\mathbf{w} := \mathbf{u} \ominus c\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$, y $\mathbf{u} = c\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}$.

Proof. tbc □

Los siguientes resultados son de los más importantes en toda la matemática.

Teorema 173 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno. Entonces*

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$$

para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$. La desigualdad de arriba es una igualdad si y solo si $\mathbf{u}$ es múltiplo de $\mathbf{v}$ o vice versa.

Proof. tbc □

Teorema 174 (Desigualdad triangular). Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno. Entonces

$$\|\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Proof. tbc □

6.1 Bases ortonormales

Definición 175. Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno. Una lista de vectores $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbf{V}$ se llama **ortonormal**, si $\|\mathbf{e}_j\| = 1$ para todo $j = 1, \dots, n$ y $\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k \rangle = 0$ para $j \neq k$.

Ejemplo 176. Los vectores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ son ortonormales en K^n .

Los vectores $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ son ortonormales en K^3 . □

Lema 177. Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno y $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbf{V}$ vectores ortonormales. Entonces se tiene lo siguiente.

(i) Para $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ se tiene

$$\|\alpha_1 \mathbf{e}_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n \mathbf{e}_n\|^2 = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2.$$

(ii) Los vectores $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbf{V}$ son linealmente independientes.

Proof. El punto (i) es una consecuencia de varias aplicaciones de Pítagoras, pues

$$\|\alpha_1 \mathbf{e}_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n \mathbf{e}_n\|^2 = \|\alpha_1 \mathbf{e}_1\|^2 + \|\alpha_2 \mathbf{e}_2 \oplus \dots \oplus \alpha_n \mathbf{e}_n\|^2 = |\alpha_1|^2 + \|\alpha_2 \mathbf{e}_2 \oplus \dots \oplus \alpha_n \mathbf{e}_n\|^2.$$

El punto (ii) es una consecuencia de (i): si $\alpha_1 \mathbf{e}_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$, entonces

$$|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 = 0,$$

y en consecuencia $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. □

Definición 178. Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno. Si $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbf{V}$ son una base de $\mathbf{V}$ y es ortonormal, entonces se dice que es una **base ortonormal**.

Por ejemplo, la base canónica $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ son ortonormales en K^n . De inmediato obtenemos lo siguiente.

Lema 179. Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno con $\dim(\mathbf{V}) = n$. Si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ son ortonormales, entonces son una base ortonormal.

Proof. Si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ son ortonormales, entonces son linealmente independientes según Lema 177 (ii). Según Corolario 71, es base. $\square$

Teorema 180. Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno y $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ una base ortonormal. Entonces para cada $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$,

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 \oplus \dots \oplus \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_n \rangle \mathbf{e}_n,$$

y

$$\|\mathbf{v}\|^2 = |\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_n \rangle|^2.$$

Proof. Dado que $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ es base, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tal que

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n \mathbf{e}_n.$$

Por lo tanto,

$$\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{e}_k, \alpha_1 \mathbf{e}_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n \mathbf{e}_n \rangle = \alpha_1 \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_1 \rangle + \dots + \alpha_n \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n \rangle = \overline{\alpha_k}.$$

El Lema 177 (i) implica la segunda identidad. $\square$

Si tenemos una lista de vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ linealmente independientes, entonces es posible determinar una lista ortonormal que genere los mismos subespacios.

Lema 181 (Gram-Schmidt). Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno y $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ una lista de vectores linealmente independientes. Entonces, los vectores $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &:= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, \\ \mathbf{e}_2 &:= \frac{\mathbf{v}_2 \ominus \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{v}_2 \ominus \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1\|} \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_k &:= \frac{\mathbf{v}_k \ominus \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 \ominus \dots \ominus \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_{k-1} \rangle \mathbf{e}_{k-1}}{\|\mathbf{v}_k \ominus \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 \ominus \dots \ominus \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_{k-1} \rangle \mathbf{e}_{k-1}\|} \end{aligned}$$

son ortonormales, y $\text{span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) = \text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ para $k = 1, \dots, n$.

Proof. Notamos que $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, y por lo tanto $\|\mathbf{e}_1\| = 1$ y $\text{span}(\mathbf{v}_1) = \text{span}(\mathbf{e}_1)$. Supongamos que $1 < j < n$, y que ya hemos verificado que

(a) $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1}$ son ortonormales

(b) $\text{span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) = \text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ para $k = 1, \dots, j-1$.

Verificaremos ahora que $\mathbf{e}_j$ está bien definido y que se cumplen (a) y (b) para j . Notamos que la independencia lineal de los $\mathbf{v}_k$ implica

$$\mathbf{v}_j \notin \text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j-1}) = \text{span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1}).$$

Por lo tanto, $\mathbf{e}_j$ está bien definido, y $\|\mathbf{e}_j\| = 1$. Para $1 \leq k < j$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k \rangle &= \frac{\langle \mathbf{v}_j \ominus \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 \ominus \dots \ominus \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{e}_{j-1} \rangle \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_k \rangle}{\|\mathbf{v}_j \ominus \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 \ominus \dots \ominus \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{e}_{j-1} \rangle \mathbf{e}_{j-1}\|} \\ &= \frac{\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{e}_k \rangle - \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{e}_k \rangle}{\|\mathbf{v}_j \ominus \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 \ominus \dots \ominus \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{e}_{j-1} \rangle \mathbf{e}_{j-1}\|} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_j$ son ortonormales. Además, por definición, $\mathbf{v}_j \in \text{span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_j)$, y por lo tanto $\text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j) \subseteq \text{span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_j)$. Notamos que $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j$ son linealmente independientes por hipótesis, y $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_j$ son linealmente independientes por ser ortonormales. Por lo tanto, $\dim \text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j) = j = \dim \text{span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_j)$. Concluimos entonces que

$$\text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j) = \text{span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_j).$$

□

En particular obtenemos lo siguiente.

Corolario 182. *Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno de dimension finita. Entonces existe una base ortonormal. Además cada lista de vectores ortonormales puede completarse a una base ortonormal.*

Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno. Para $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ fijo, notamos que la función

$$\mathbf{v} \mapsto \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$$

es un elemento de $\mathbf{V}^*$.

Ejemplo 183. *Consideramos los siguientes ejemplos.*

(i) *Consideramos $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno Euclidiano. Para $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ dado por $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - 5x_2 + x_3$. podemos escribir*

$$\varphi(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3,$$

donde $\mathbf{u} = (2, -5, -1)$.

(ii) Consideramos $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ con el producto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx.$$

Para $\varphi \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})^*$ dado por

$$\varphi(p) = \int_{-1}^1 p(t) \cos(\pi t) dt,$$

no es para nada obvio que existe un $q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$\varphi(p) = \langle q, p \rangle \quad \text{para todo } p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Teorema 184 (Representación de Riesz en dimension finita). Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno de dimension finita. Entonces, para cada $\varphi \in \mathbf{V}^*$ existe único $\mathbf{u}_\varphi$ tal que

$$\varphi(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_\varphi \rangle \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

Proof. Sea $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ una base ortonormal de $\mathbf{V}$, que existe según Corolario 182. Usando Teorema 180 y la linealidad de φ podemos escribir

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{v}) &= \varphi(\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 \oplus \dots \oplus \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_n \rangle \mathbf{e}_n) \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \varphi(\mathbf{e}_1) + \dots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_n \rangle \varphi(\mathbf{e}_n) \\ &= \langle \mathbf{v}, \overline{\varphi(\mathbf{e}_1)} \mathbf{e}_1 \oplus \dots \oplus \overline{\varphi(\mathbf{e}_n)} \mathbf{e}_n \rangle. \end{aligned}$$

Es decir, $\mathbf{u}_\varphi := \overline{\varphi(\mathbf{e}_1)} \mathbf{e}_1 \oplus \dots \oplus \overline{\varphi(\mathbf{e}_n)} \mathbf{e}_n$ cumple con

$$\varphi(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_\varphi \rangle \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

Para mostrar unicidad, supongamos que $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ cumplen con

$$\varphi(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

Entonces

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \ominus \mathbf{u}_2 \rangle = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

En particular $\langle \mathbf{u}_1 \ominus \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \ominus \mathbf{u}_2 \rangle = 0$, y por definición de productos internos $\mathbf{u}_1 \ominus \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$, o sea $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$. $\square$

6.2 Complementos y proyecciones ortogonales

Definición 185. Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno. Para $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$, se define el **complemento ortogonal**

$$\mathbf{U}^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0 \text{ para todo } \mathbf{u} \in \mathbf{U}\}.$$

Lema 186. Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno. Entonces,

$$(i) \quad \mathbf{U} \subseteq \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{U}^\perp \leq \mathbf{V}^\perp.$$

$$(ii) \quad \{\mathbf{0}\}^\perp = \mathbf{V}.$$

$$(iii) \quad \mathbf{V}^\perp = \{\mathbf{0}\}.$$

$$(iv) \quad \mathbf{U} \subseteq \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{U} \cap \mathbf{U}^\perp \subseteq \{\mathbf{0}\}, \text{ y } \mathbf{U} \leq \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{U} \cap \mathbf{U}^\perp = \{\mathbf{0}\}$$

$$(v) \quad \mathbf{U} \subseteq \mathbf{W} \subseteq \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{W}^\perp \subseteq \mathbf{U}^\perp.$$

Lema 187. Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno y $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$ un subespacio de dimension finita. Entonces

$$(i) \quad \mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp.$$

$$(ii) \quad \mathbf{U} = (\mathbf{U}^\perp)^\perp.$$

Proof. Mostraremos solo (i). Verificamos primero que

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{U}^\perp. \tag{6.1}$$

Sea $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ base de $\mathbf{U}$. Para cada $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ podemos escribir

$$\mathbf{v} = \underbrace{\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 \oplus \dots \oplus \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_n \rangle \mathbf{e}_n}_{\mathbf{u}:=} \oplus \underbrace{\mathbf{v} \ominus \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 \ominus \dots \ominus \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_n \rangle \mathbf{e}_n}_{\mathbf{w}:=}$$

Obviamente, $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$. Además, $\langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_j \rangle = 0$, y por lo tanto $\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = 0$. Concluimos que $\mathbf{w} \in \mathbf{U}^\perp$, y por lo tanto (6.1). Según Lema 186, $\mathbf{U} \cap \mathbf{U}^\perp = \{\mathbf{0}\}$, y por lo tanto la suma es directa, $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp$. $\square$

Definición 188 (Proyección ortogonal). Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno y $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$ un subespacio de dimension finita. Entonces se define $P_{\mathbf{U}} \in L(\mathbf{V})$ como $P_{\mathbf{U}}\mathbf{v} = \mathbf{u}$, donde $\mathbf{v} = \mathbf{u} \oplus \mathbf{w}$, $\mathbf{u} \in \mathbf{U}, \mathbf{w} \in \mathbf{U}^\perp$ según Lema 187. En otras palabras,

$$P_{\mathbf{U}}\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 \oplus \dots \oplus \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_n \rangle \mathbf{e}_n$$

Lema 189. Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno y $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$ un subespacio de dimension finita. Entonces se tiene lo siguiente.

- (i) $P_U \in L(\mathbf{V})$,
- (ii) $P_U(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u} \in U$,
- (iii) $P_U(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{w} \in U^\perp$,
- (iv) $\text{img}(P_U) = U$,
- (v) $\ker(P_U) = U^\perp$,
- (vi) $\mathbf{v} \ominus P_U(\mathbf{v}) \in U^\perp$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$,
- (vii) $P_U^2 = P_U$,
- (viii) $\|P_U \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v}\|$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Proof. tbc □

Lema 190. Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno y $U \leq \mathbf{V}$ un subespacio de dimension finita. Para $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ se tiene

$$\|\mathbf{v} \ominus P_U \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v} \ominus \mathbf{u}\| \quad \text{para todo } \mathbf{u} \in U.$$

Proof. Sea $\mathbf{u} \in U$, entonces

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} \ominus P_U \mathbf{v}\|^2 &\leq \|\mathbf{v} \ominus P_U \mathbf{v}\|^2 + \|P_U \mathbf{v} \ominus \mathbf{u}\|^2 \\ &= \|\mathbf{v} \ominus P_U \mathbf{v} \oplus P_U \mathbf{v} \ominus \mathbf{u}\|^2 \\ &= \|\mathbf{v} \ominus \mathbf{u}\|^2. \end{aligned}$$

La primera identidad arriba es una consecuencia del teorema de Pítagoras, pues $P_U \mathbf{v} \ominus \mathbf{u} \in U$, y según Lemma 189 $\mathbf{v} \ominus P_U \mathbf{v} \in U^\perp$. □

6.3 Transformaciones adjuntas

Sean $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{V}})$ y $(\mathbf{W}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{W}})$ dos espacios producto interno de dimension finita., y $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Para $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, notamos que

$$\mathbf{v} \mapsto \langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{W}}$$

es un elemento de $\mathbf{V}^*$, y por el teorema de representación de Riesz existe único elemento $\mathbf{w}' \in \mathbf{V}$ tal que

$$\langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{W}} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}' \rangle_{\mathbf{V}}.$$

Definición 191. Usando las notaciones de arriba, la función $f' : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}$ dada por $f'(\mathbf{w}) = \mathbf{w}'$ se llama **adjunta** de f .

Tenemos lo siguiente.

Lema 192. Sean $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{V}})$ y $(\mathbf{W}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{W}})$ dos espacios producto interno sobre K de dimension finita, $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, y $f' : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}$ su adjunta. Entonces $f' \in L(\mathbf{W}, \mathbf{V})$. Además, tenemos lo siguiente.

- (i) $(f + g)' = f' + g'$ para $f, g \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$,
- (ii) $(\lambda f)' = \bar{\lambda} f'$ para $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, $\lambda \in K$,
- (iii) $(f')' = f$ para $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$,
- (iv) $\text{id}' = \text{id}$,
- (v) $(f \circ g)' = g' \circ f'$ para $g \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, $f \in L(\mathbf{W}, \mathbf{U})$.

Además,

- (vi) $\ker(f') = \text{img}(f)^\perp$,
- (vii) $\text{img}(f') = \ker(f)^\perp$
- (vi) $\ker(f) = \text{img}(f')^\perp$,
- (iv) $\text{img}(f) = \ker(f')^\perp$

□

Recordamos que si $A \in K^{m \times n}$, entonces la matriz $A^H = (a'_{ji})_{j=1, i=1}^{n, m} \in K^{n \times m}$ dada por

$$a'_{ji} = \overline{a_{ij}}$$

se llama **transpuesta conjugada (transpuesta hermitiana)** de A .

Lema 193. Sean $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{V}})$ y $(\mathbf{W}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{W}})$ dos espacios producto interno sobre K de dimension finita con bases ortonormales $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, y $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m\}$. Entonces

$$\Phi_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f)^H = \Phi_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(f').$$

□

Definición 194. Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno y $f \in L(\mathbf{V})$. Entonces f se llama **auto-adjunto**, si $f' = f$, es decir

$$\langle f(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, f(\mathbf{v}) \rangle \quad \text{para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

Lema 195. Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno sobre $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ y $f \in L(\mathbf{V})$ auto-adjunto. Entonces $\sigma(f) \subseteq \mathbb{R}$. En otras palabras, cada valor propio es real.

Proof. Sea $\lambda \in \sigma(f)$ y $\mathbf{v}$ un vector propio asociado. Entonces

$$\lambda \|\mathbf{v}\|^2 = \langle \lambda \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle f(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, f(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \lambda \mathbf{v} \rangle = \bar{\lambda} \|\mathbf{v}\|^2.$$

Por lo tanto, $\lambda = \bar{\lambda}$, o sea $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Definición 196. Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno y $f \in L(\mathbf{V})$. Entonces f se llama **normal**, si $f \circ f' = f' \circ f$.

Por ejemplo, transformaciones auto-adjuntas son normales pues $f = f'$.

Ejemplo 197. El operador $f \in L(\mathbb{C}^2)$ con matriz asociada con respecto a la base canónica

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

no es auto-adjunto, pero si es normal.

Teorema 198 (Teorema espectral en $\mathbb{C}$). Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno de dimension finita sobre $\mathbb{C}$ y $f \in L(\mathbf{V})$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) f es normal,
- (ii) existe una base ortonormal de $\mathbf{V}$ de vectores propios de f ,
- (iii) f tiene una matriz asociada diagonal con respecto a una base ortonormal de $\mathbf{V}$.

Teorema 199 (Teorema espectral en $\mathbb{R}$). Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno de dimension finita sobre $\mathbb{R}$ y $f \in L(\mathbf{V})$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) f es auto-adjunto,
- (ii) existe una base ortonormal de $\mathbf{V}$ de vectores propios de f ,
- (iii) f tiene una matriz asociada diagonal con respecto a una base ortonormal de $\mathbf{V}$.