

Análisis Numérico de Ecuaciones Diferenciales Parciales
para Ingeniería Matemática

Michael Karkulik
`michael.karkulik@usm.cl`

Contents

1	Introducción a elementos finitos	5
1.1	La formulación fuerte y la formulación variacional	6
1.2	Resolución de la formulación variacional	7
1.3	Elementos finitos en una dimensión	10
1.3.1	Implementación de elementos finitos en una dimension	11
1.3.2	Análisis a priori	13
2	Elementos finitos abstractos	15
2.1	Análisis funcional de formulaciones variacionales	15
2.2	El método de Galerkin	19
3	Espacios de Sobolev	21
3.1	Dominios Lipschitz	24
3.2	Formulaciones variacionales en espacios de Sobolev	28
3.2.1	El problema Dirichlet homogéneo	28
3.2.2	El problema Neumann no homogéneo	29
4	Elementos finitos en dos dimensiones	31
4.1	Elementos finitos \mathbb{P}_1	32
4.2	Implementación de elementos finitos en dos dimensiones	34
4.3	Análisis a priori	37
4.4	Regularidad elíptica y aproximación con mallas graduadas	42
4.5	Análisis a posteriori	45
4.5.1	El operador de Clément	47
4.5.2	Un estimador a posteriori residual	52
4.6	Refinamiento local de mallas	54
4.7	Un algoritmo adaptativo	55
4.8	Convergencia del algoritmo adaptativo	57
4.9	El lemma de Strang	62
4.10	Error de elementos finitos en otras normas	62

5	Elementos finitos para problemas parabólicos	63
5.1	La formulación semidiscreta con elementos finitos	66
5.2	Discretización completa	68
5.3	Valores iniciales no regulares	71
5.3.1	Valores iniciales en $H_0^1(\Omega)$	71
5.3.2	Valores iniciales en $L^2(\Omega)$	75

Chapter 1

Introducción a elementos finitos

Sea \mathcal{P} un operador diferencial. Si queremos aproximar la solución u de la ecuación diferencial parcial (EDP)

$$(\mathcal{P}u)(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega \quad (1.1)$$

usando una computadora, entonces tenemos que *discretizar* la ecuación, es decir, transformarla en un sistema

$$\mathcal{P}_h u_h = f_h. \quad (1.2)$$

de una finita cantidad de ecuaciones. Si la EDP (1.1) es lineal en u , entonces el sistema (1.2) será lineal, es decir, \mathcal{P}_h es una matriz, y para calcular el vector u_h hay que resolver el último sistema. En el curso *Análisis numérico II* conocimos un método de discretización, las *diferencias finitas*, donde la idea es simplemente reemplazar las derivadas en \mathcal{P} por cocientes - en otras palabras, se *discretiza* el operador \mathcal{P} . En el presente curso vamos a conocer un método más avanzado de discretización, el método de elementos finitos (FEM en inglés, *finite element method*). Este método es muy común en diferentes ámbitos, y su popularidad se basa en lo siguiente.

1. Es muy flexible con respecto a la geometría Ω . El método de diferencias finitas presenta varios problemas si Ω no tiene estructura tensorial. Con FEM se puede discretizar geometrías más complejas sin problema.
2. Se basa en *formulaciones variacionales*, respectivamente minimización de energías. Es decir, tiene sentido *físico*.
3. Su análisis matemático se basa en análisis funcional y se aplica a situaciones reales, en comparación con otros métodos de discretización.

El objetivo de este curso es entregar el análisis matemático para elementos finitos y los básicos de implementación.

Anotamos puntos en \mathbb{R}^d como $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Para una, dos, o tres dimensiones usaremos también a veces la notación x , (x, y) , y (x, y, z) si es más cómoda.

1.1 La formulación fuerte y la formulación variacional

Vamos a considerar el prototipo de una EDP elíptica, la ecuación de Poisson con condiciones de frontera Dirichlet y Neumann. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio abierto con frontera $\Gamma := \partial\Omega$ con vector normal n mirando hacia afuera. Descomponemos Γ en dos partes disyuntos $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ y relativamente abiertos $\Gamma = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N$. Dadas dos funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $\phi : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}$, estamos buscando una función $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x) & \text{para todo } x \in \Omega, \\ u(x) &= 0 & \text{para todo } x \in \Gamma_D \\ \partial u / \partial n(x) &= \phi(x) & \text{para todo } x \in \Gamma_N, \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x)$$

es el Laplaciano de u . La formulación (1.3) se llama **formulación fuerte** del problema de valor de frontera. Para dar sentido a (1.3), es decir solo para verificar si una función u es solución de (1.3), necesitamos prácticamente $u \in C^2(\overline{\Omega})$, donde

$$C^k(\overline{\Omega}) := \left\{ w : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid w \in C^k(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

Si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ resuelve (1.3), entonces se dice que u es una **solución fuerte**.

Pensamos un segundo en la ecuación de transporte

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Es obvio que para cualquier función diferenciable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, una solución de la ecuación de transporte es $u_f(x, t) = f(x - t)$, es decir, la función f se traslada a lo largo del eje x si corre el tiempo. Para que u_f sea una solución fuerte, necesitamos que f sea diferenciable. Pensamos ahora en una función no diferenciable $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y definimos $u_g(x, t) := g(x - t)$, entonces u representa la función g que se traslada a lo largo del eje x si corre el tiempo. Es decir, u_g recupera el *sentido físico* de la ecuación, pero aún así no puede ser solución fuerte, pues, g no es diferenciable, y por lo tanto tampoco u_g . Este ejemplo indica que es necesario generalizar el concepto de solución.

Para generalizar el concepto de solución para (1.3) recordamos la fórmula de integración por parte

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} v \, dx + \int_{\Omega} u \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx = \int_{\Gamma} u v n_j \, ds_x \quad \text{para todo } u, v \in C^1(\overline{\Omega}), \tag{1.4}$$

donde n_j es la componente j del vector normal n . Ahora sea $u \in C^2(\overline{\Omega})$ una solución fuerte de (1.3). Sea $v \in C_D^1(\overline{\Omega})$, donde

$$C_D^1(\overline{\Omega}) := \{w \in C^1(\overline{\Omega}) \mid w|_{\Gamma_D} = 0\},$$

entonces calculamos, usando (1.4),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v \, dx &= - \int_{\Omega} (\Delta u) v \, dx = - \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} v \, dx = \sum_{j=1}^d \left(\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_j} v n_j \, ds \right) \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds. \end{aligned}$$

Recordamos que, según (1.3), $\partial u / \partial n = \phi$ sobre Γ_N . Además $v = 0$ sobre Γ_D . Es decir, llegamos al siguiente resultado.

Proposition 1. *Sea $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solución fuerte de (1.3). Entonces*

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_N} \phi v \, ds \quad \text{para todo } v \in C_D^1(\overline{\Omega}). \quad (1.5)$$

□

Una función u que satisface (1.5) se llama **solución variacional** o **solución débil**. En vez de pedir que u satisfice la EDP en cada punto, se pide que u satisfice la EDP en un sentido *promedio*, y las funciones v las podemos entender como pesos. Cada solución fuerte es una solución variacional, es decir, el concepto de solución variacional es una generalización del concepto de solución fuerte.

Ahora podemos introducir una primera versión de una **formulación variacional**: buscar $u \in C_D^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_N} \phi v \, ds \quad \text{para todo } v \in C_D^1(\overline{\Omega}). \quad (1.6)$$

1.2 Resolución de la formulación variacional

El proceso de resolver la formulación variacional (1.6) se basa en argumentos de análisis funcional.

Teorema 2. *(Teorema de representación de Riesz) Sea H un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot, \cdot)_H$. Entonces, la aplicación de Riesz*

$$I_H : \begin{cases} H \rightarrow H' \\ u \mapsto (v \mapsto (u, v)_H) \end{cases}$$

es lineal, una isometría, y biyectiva. En particular, para cada funcional lineal $F \in H'$ existe único $u \in H$ tal que

$$(u, v)_H = F(v) \quad \text{para todo } v \in H,$$

$$\text{y } \|u\|_H = \|F\|_{H'}. \quad \square$$

Veamos si el teorema de representación de Riesz se puede aplicar para resolver nuestra formulación variacional (1.6). Por ahora, supongamos que $\Gamma_N = \emptyset$. El lado izquierdo

$$u, v \mapsto (u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

es un producto interno para $C_D^1(\overline{\Omega})$: es lineal en cada argumento y simétrico. Además, es definida positiva, pues $0 = (u, u) = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$ implica que $\nabla u = 0$, es decir, u es una constante. Dado que $u = 0$ sobre Γ , concluimos que $u = 0$. El lado derecho

$$F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$$

de (1.6) es un funcional lineal. Según Hölder,

$$|F(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Para mostrar que la continuidad de F en la norma inducida por el producto interno (\cdot, \cdot) , necesitaremos el siguiente resultado, que vamos a demostrar solo para $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo en \mathbb{R}^2 .

Lema 3. (*Desigualdad de Poincaré*) Sea $\Omega = [a, b] \times [c, d]$. Entonces

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{diam}(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{para todo } u \in C_D^1(\overline{\Omega}).$$

Proof. Laboratorio. □

Usando la Desigualdad de Poincaré, concluimos

$$|F(v)| \leq \text{diam}(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

es decir, el funcional F es continuo con norma dual

$$\|F\| = \text{diam}(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Aun así, el teorema de representación de Riesz no se aplica, pues, $C_D^1(\overline{\Omega})$ asociado con la norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ no es completo.

El remedio es considerar la *compleción* de $C_D^1(\bar{\Omega})$ con respecto a la norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$. Así obtenemos un espacio de Hilbert que se denota por $H_0^1(\Omega)$. Eso nos lleva a los **espacios de Sobolev** en el capítulo 3. Nuestra formulación variacional se lee entonces

$$\text{hallar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que } \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.7)$$

Se puede demostrar que el lado izquierdo es un producto interno en $H_0^1(\Omega)$, y el lado derecho es un funcional lineal continuo. Por lo tanto, el teorema de representación de Riesz se aplica y garantiza única solución $u \in H_0^1(\Omega)$ de la formulación variacional (1.7).

FEM es una técnica de discretización para aproximar soluciones a formulaciones variacionales, como por ejemplo (1.7). La idea es reemplazar el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ por un espacio discreto, es decir, de dimension finita.

1.3 Elementos finitos en una dimensión

En esta sección vamos a presentar FEM para la discretización de (1.7) en el caso $d = 1$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\Omega = (0, 1)$. La formulación variacional se lee entonces

$$\text{hallar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que } \int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.8)$$

Para discretizar, descomponemos $\Omega = (0, 1)$ en $n + 1$ subintervalos (x_j, x_{j+1}) ,

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1.$$

Los x_j se llaman *nodos*, y los subintervalos $K_j := (x_j, x_{j+1})$ se llaman *elementos*. El conjunto de todos los elementos se llama *mallá* $\mathcal{T} := \{K_j \mid j = 0, \dots, n\}$. Cada elemento tiene una longitud asociada $h_{K_j} = x_{j+1} - x_j$, y $h = \max_{K \in \mathcal{T}} h_K$ representa la resolución global de la mallá. El espacio discreto que vamos a usar es el espacio de funciones continuas, afines a trozos

$$\mathcal{S}^1(\mathcal{T}) := \{u \in C(\bar{\Omega}) \mid u|_{K_j} \in \mathbb{P}_1 \text{ para todo } K \in \mathcal{T}\},$$

donde \mathbb{P}_k es el espacio de polinomios de grado $k \in \mathbb{N}$. Para $j = 0, \dots, n + 1$ definimos las *funciones techo*

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{h} & x \in (x_{j-1}, x_j), \\ \frac{x_{j+1}-x}{h} & x \in (x_j, x_{j+1}), \\ 0 & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Se puede mostrar que $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}) = \text{span} \{\varphi_j \mid j = 0, \dots, n + 1\}$. Para incorporar las condiciones de frontera, definimos

$$\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}) := \{u \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \mid u(0) = u(1) = 0\}.$$

Se puede mostrar que $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}) = \text{span} \{\varphi_j \mid j = 1, \dots, n\}$. Además, $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ es un subespacio de $H_0^1(\Omega)$. El método de elementos finitos consiste en reemplazar el espacio de dimension infinita $H_0^1(\Omega)$ en la formulación variacional (1.8) por el espacio de dimension finita $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$:

$$\text{hallar } u_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}) \text{ tal que } \int_0^1 u_h'(x)v_h'(x) dx = \int_0^1 f(x)v_h(x) dx \quad \text{para todo } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}). \quad (1.9)$$

Todavía no sabemos como entender la integral de las derivadas de arriba, pues, estrictamente no está bien definida la derivada de una función en $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$. Por ahora pensamos en la integral izquierda de arriba como una suma de integrales sobre los elementos. Notamos que $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ es un subespacio de dimension finita de $H_0^1(\Omega)$, y por lo tanto un espacio de Hilbert. Es decir, el teorema de representación de Riesz implica que (1.9) tiene única solución $u_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$.

1.3.1 Implementación de elementos finitos en una dimension

Notamos que (1.9) es un sistema de ecuaciones lineales. Primero, por la linealidad de las dos integrales con respecto a v_h concluimos que (1.9) es equivalente a

$$\text{hallar } u_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}) \text{ tal que } \int_0^1 u_h'(x) \varphi_k'(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi_k(x) dx \quad \text{para todo } k = 1, \dots, n.$$

Segundo, si escribimos $u_h = \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j \varphi_j$ con $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, entonces llegamos a

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j \int_0^1 \varphi_j'(x) \varphi_k'(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi_k(x) dx \quad \text{para todo } k = 1, \dots, n.$$

Definimos la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y el vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ por

$$\mathbf{A}_{k,j} := \int_0^1 \varphi_j'(x) \varphi_k'(x) dx, \quad \mathbf{b}_k := \int_0^1 f(x) \varphi_k(x) dx,$$

entonces concluimos que (1.9) es equivalente a

$$\text{hallar } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}. \quad (1.10)$$

Los problemas (1.9) y (1.10) son equivalentes, y la solución u_h de (1.9) y la solución \mathbf{u} del último sistema lineal están relacionados como indicado antes, $u_h = \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j \varphi_j$. Se puede ver directamente que \mathbf{A} es invertible: por definición es simétrica, y con la identificación $u_h = \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j \varphi_j$ calculamos

$$\mathbf{u}^\top \mathbf{A} \mathbf{u} = \sum_{j,k=1}^n \mathbf{u}_k \mathbf{A}_{k,j} \mathbf{u}_j = \int_0^1 (u_h')^2(x) dx = \|u_h'\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Es decir, $\mathbf{u}^\top \mathbf{A} \mathbf{u} = 0$ si y solo si $\|u_h'\|_{L^2(\Omega)} = 0$, lo que significa que u_h es una constante. Dado que u_h es zero en los extremos de Ω , u_h tiene que ser zero, es decir, $\mathbf{u} = 0$.

Para determinar la solución de elementos finitos u_h tenemos que fabricar primero la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y el vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Este proceso se llama **ensamble**. Podemos escribir

$$\mathbf{A}_{k,j} := \int_0^1 \varphi_j' \varphi_k' dx = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \varphi_j' \varphi_k' dx = \sum_{\ell=0}^n \int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} \varphi_j' \varphi_k' dx, \quad (1.11)$$

y notamos lo siguiente.

- La matriz \mathbf{A} es *tridiagonal*, es decir $\mathbf{A}_{k,j} = 0$ para $|k-j| > 1$. Eso reduce considerablemente la memoria: en vez de guardar n^2 elementos necesitamos guardar solamente $n + 2(n-1) = 3n - 2$. Eso se puede reducir aun mas a $2n - 1$ tomando en cuenta que \mathbf{A} es simétrica. En general, matrices de elementos finitos son *ralas* (*sparse* en inglés), es decir, el número de los elementos no zeros es del orden del tamaño de la matriz.

- En (1.11) hay que pasar por tres bucles, sobre j , k , y ℓ . En general se puede recorrer los bucles en cualquier orden, pero en la practica se ensambla *por elementos*, es decir, el bucle sobre los elementos (sobre ℓ) es el bucle exterior. Entonces los bucles interiores j, k pueden correr solamente sobre $\{\ell, \ell + 1\}$.

Obtenemos el siguiente pseudo-algoritmo.

Algorithm 1: Ensamble

Input: malla $\mathcal{T} = \{K_0, K_1, \dots, K_n\}$

```

1 A = 0, b = 0;
2 for  $K_\ell \in \mathcal{T}$  do
3   for  $j \in \{\ell, \ell + 1\}, j \notin \{0, n + 1\}$  do
4     for  $k \in \{\ell, \ell + 1\}, k \notin \{0, n + 1\}$  do
5        $\mathbf{A}_{k,j} = \mathbf{A}_{k,j} + \int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} \varphi'_j \varphi'_k dx$ 
6     end
7      $\mathbf{b}_j = \mathbf{b}_j + \int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} f \varphi_j dx$ 
8   end
9 end

```

Output: matriz **A**, vector **b**.

En el último algoritmo, las integrales para calcular **A** se pueden calcular exactamente, mientras las integrales para calcular **b** se tienen que calcular con integración numérica.

1.3.2 Análisis a priori

Ya que tenemos solución única $u \in H_0^1(\Omega)$ y nuestro problema y una aproximación $u_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ de elementos finitos, nos interesa el comportamiento del error $e_h := u - u_h$ con respecto a la resolución h de la malla. Vamos a usar la notación

$$a(u, v) := \int_0^1 u'(x)v'(x) dx, \quad f(v) := \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

Las funciones u y u_h están caracterizadas por

$$\begin{aligned} a(u, v) &= f(v) \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega), \\ a(u_h, v_h) &= f(v_h) \quad \text{para todo } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}). \end{aligned}$$

Particularmente, dado que $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}) \subset H_0^1(\Omega)$, podemos restringir la primera ecuación a funciones discretas y restar la segunda, y concluimos

$$a(u - u_h, v_h) = a(u, v_h) - a(u_h, v_h) = 0 \quad \text{para todo } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}). \quad (1.12)$$

Esta última identidad se llama *ortogonalidad de Galerkin*: La forma bilineal a es un producto interno en un espacio de Hilbert, y el error $u - u_h$ es ortogonal al subespacio $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)}^2 &= a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u) - a(u - u_h, u_h) \\ &= a(u - u_h, u) - a(u - u_h, v_h) = a(u - u_h, u - v_h) \\ &\leq \|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)} \|(u - v_h)'\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{para todo } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}). \end{aligned}$$

En otras palabras, la solución de elementos finitos u_h es la mejor aproximación a u en el espacio $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ si se mide el error en la norma inducida por el product interno a ,

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)} \leq \inf_{v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})} \|(u - v_h)'\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.13)$$

Para cuantificar el ínfimo al lado derecho en terminos de h , vamos a construir un v_h específico. Por ahora vamos a usar el *interpolador nodal*

$$I_h : \begin{cases} C(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \\ u \mapsto \sum_{j=0}^{n+1} u(x_j)\varphi_j. \end{cases}$$

Lema 4. *Sea $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que para cada malla \mathcal{T} con resolución $h > 0$ se tiene*

$$\|u - I_h u\|_{L^2(\Omega)}^2 + h^2 \|(u - I_h u)'\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq Ch^4 \|u''\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Proof. Primero notamos que para una función v se tiene

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}} \|v\|_{L^2(K)}^2.$$

Sea $K = (x_\ell, x_{\ell+1})$ un elemento. Entonces $(u - I_h u)(x_\ell) = (u - I_h u)(x_{\ell+1}) = 0$. Por el teorema de Rolle existe un $\xi \in K$ tal que $(u - I_h u)'(\xi) = 0$, y concluimos para cada $x \in K$ $(u - I_h u)'(x) = \int_\xi^x (u - I_h u)''(s) ds = \int_\xi^x u''(s) ds$, y por Cauchy-Schwarz $|(u - I_h u)'(x)| \leq h_K^{1/2} \|u''\|_{L^2(K)}$. Concluimos

$$\|(u - I_h u)'\|_{L^2(K)}^2 \leq h_K^2 \|u''\|_{L^2(K)}^2 \leq h^2 \|u''\|_{L^2(K)}^2.$$

Para acotar el error en L^2 , notamos que para $x \in K$ se tiene $(u - I_h u)(x) = \int_{x_\ell}^x (u - I_h u)'(s) ds$, y por lo tanto, usando la cota anterior,

$$\|u - I_h u\|_{L^2(K)}^2 \leq h_K^2 \|(u - I_h u)'\|_{L^2(K)}^2 \leq h_K^4 \|u''\|_{L^2(K)}^2 \leq h^4 \|u''\|_{L^2(K)}^2.$$

Sumando sobre todos los elementos $K \in \mathcal{T}$ obtenemos el resultado con $C = 2$. \square

Corolario 5. Sea $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solución de (1.8). Sea \mathcal{T} una malla con resolución $h > 0$ y $u_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ solución de elementos finitos (1.9). Entonces existe una constante $C > 0$ que no depende de \mathcal{T} , tal que

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} + \|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|u''\|_{L^2(\Omega)}.$$

Proof. Mas adelante vamos a ver que si $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$, entonces $u = 0$ en Γ . Por lo tanto, $I_h u \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$, y por (1.13) y el Lema 4,

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)} \leq \inf_{v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})} \|(u - v_h)'\|_{L^2(\Omega)} \leq \|(u - I_h u)'\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|u''\|_{L^2(\Omega)}.$$

s Para acotar la norma en L^2 , notamos que $u - u_h \in H_0^1(\Omega)$. Dado que $H_0^1(\Omega)$ es la completación de $C_D^1(\overline{\Omega})$, concluimos que la desigualdad de Poincaré aplica a funciones en $H_0^1(\Omega)$, y por lo tanto

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)}.$$

\square

Chapter 2

Elementos finitos abstractos

2.1 Análisis funcional de formulaciones variacionales

El método de elementos finitos se puede entender en un nivel mas abstracto. Vamos a recordar un par de conceptos.

- Si X es un espacio vectorial sobre el campo de escalares \mathbb{R} , entonces una función $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ se llama *norma* y $(X, \|\cdot\|)$ *espacio normado*, si

- (i) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$,
- (ii) $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$,
- (iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ para todo $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$,
- (iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$.

Un espacio normado se llama *completo*, si cada sucesión de Cauchy converge a un elemento de X . Espacios normados y completos se llaman *espacios de Banach*.

- Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se llama funcional lineal, si

$$f(u + \alpha w) = f(u) + \alpha f(w) \quad \text{para todo } u, w \in X, \alpha \in \mathbb{R},$$

y continua si existe una constante $C_f > 0$ tal que

$$|f(v)| \leq C_f \|v\|_X.$$

El espacio dual $X' := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ lineal y continua}\}$ es un espacio de Banach con norma

$$\|f\|_{X'} := \sup_{0 \neq v \in X} \frac{|f(v)|}{\|v\|_X}.$$

- Una función $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ se llama forma bilineal si para todo $w \in X$

$$v \mapsto a(v, w) \quad \text{y} \quad v \mapsto a(w, v)$$

son lineales. Una forma bilineal a se llama *simétrica*, si $a(v, w) = a(w, v)$ para todo $v, w \in X$, y producto interno si es simétrica y $a(v, v) \geq 0$ para todo $v \in X$ y $a(v, v) = 0 \implies v = 0$. Un producto interno a induce una norma $\|v\|_X := \sqrt{a(v, v)}$. Si el espacio X es completo con esta norma, entonces se llama *espacio de Hilbert*. Tenemos la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_X \|v\|_X.$$

Una forma bilineal a se llama *continua*, si existe un $M > 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X \quad \text{para todo } u, v \in X. \quad (2.1)$$

Una forma bilineal a se llama *elíptica*, si existe un $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha \|u\|_X^2 \leq a(u, u) \quad \text{para todo } u \in X. \quad (2.2)$$

Vamos a considerar ahora el problema variacional abstracto de

$$\text{hallar } u \in X \text{ tal que} \quad a(u, v) = f(v) \quad \text{para todo } v \in X. \quad (2.3)$$

En el caso de que $a(u, v) = (u, v)_X$ el producto interno en X , el teorema de Riesz garantiza que el último problema está bien puesto, es decir, tiene única solución que depende continuamente de los datos. El próximo resultado generaliza las condiciones para que el problema (2.3) sea bien puesto.

Teorema 6. (*Lema de Lax-Milgram*) Sea X un espacio de Hilbert, $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua con constante M (2.1) y elíptica con constante α (2.2). Sea $f \in X'$. Entonces, el problema variacional

$$\text{hallar } u \in X \text{ tal que} \quad a(u, v) = f(v) \quad \text{para todo } v \in X \quad (2.4)$$

tiene única solución $u \in X$ que depende continuamente de los datos,

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{X'}$$

Proof. Definimos un operador lineal $A : V \rightarrow V'$ por $(Au)(v) := a(u, v)$. El operador A está bien definido, pues, para $u \in V$ es obvio que Au es un elemento de V' por las propiedades de la forma bilineal a . El problema (2.4) se lee entonces

$$\text{hallar } u \in X \text{ tal que} \quad Au = f.$$

Sea $I_X : X \rightarrow X'$ la aplicación del Teorema 2 de representación de Riesz, entonces podemos reescribir el problema (2.4) aún mas por

$$\text{hallar } u \in X \text{ tal que } I_X^{-1}Au = I_X^{-1}f.$$

En forma de punto fijo, el último problema se lee con cualquier $\rho > 0$

$$\text{hallar } u \in X \text{ tal que } u = u - \rho I_X^{-1}(Au - f).$$

Para demostrar que el último problema tiene única solución, vamos a aplicar el teorema de punto fijo de Banach. Falta entonces verificar que para algún $\rho > 0$, la aplicación

$$T_\rho : \begin{cases} X \rightarrow X \\ u \mapsto u - \rho I_X^{-1}(Au - f) \end{cases}$$

es una contracción. Calculamos con $x := v - w$

$$\begin{aligned} \|T_\rho v - T_\rho w\|_X^2 &= \|v - w - \rho I_X^{-1}A(v - w)\|_X^2 = \|x - \rho I_X^{-1}Ax\|_X^2 \\ &= \|x\|_X^2 - 2\rho(x, I_X^{-1}Ax)_X + \rho^2\|I_X^{-1}Ax\|_X^2. \end{aligned}$$

Ahora notamos que

$$(x, I_X^{-1}Ax)_X = (Ax)(x) = a(x, x) \leq \alpha\|x\|_X^2$$

y

$$\|I_X^{-1}Ax\|_X^2 = (I_X^{-1}Ax, I_X^{-1}Ax)_X = a(x, I_X^{-1}Ax) \leq M\|x\|_X\|I_X^{-1}Ax\|_X,$$

lo que implica

$$\|I_X^{-1}Ax\|_X \leq M^2\|x\|_X^2.$$

Por lo tanto

$$\|T_\rho v - T_\rho w\|_X^2 \leq \|v - w\|_X^2(1 - \rho\alpha + \rho^2M^2).$$

Finalmente notamos que para ρ suficientemente pequeño, se tiene $1 - \rho\alpha + \rho^2M^2 \in (0, 1)$. La dependencia continua de los datos se explica por la elípticidad de a ,

$$\alpha\|u\|_X \leq \frac{a(u, u)}{\|u\|_X} \leq \sup_{v \neq 0} \frac{|a(u, v)|}{\|v\|_X} = \sup_{v \neq 0} \frac{|f(v)|}{\|v\|_X} = \|f\|_{X'}.$$

□

Si la forma bilineal a es simétrica, entonces resolver una formulación variacional es equivalente a encontrar el mínimo de una *energía*.

Lema 7. Sea X un espacio vectorial y $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica con $a(u, u) > 0$ para todo $0 \neq u \in X$. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal. Definimos al energía

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - f(u).$$

Entonces, u minimiza J si y solo si

$$a(u, v) = f(v) \quad \text{para todo } v \in X.$$

Además, si la última formulación variacional tiene una solución, entonces es única.

Proof. Supongamos que u minimiza J . Para $v \in X$, la simetría de a implica para $t \in \mathbb{R}$

$$p(t) := J(u + tv) = J(u) + t(a(u, v) - f(v)) + \frac{1}{2}t^2a(v, v),$$

con p un polinomio cuadrático que tiene un mínimo en $t = 0$. Por lo tanto, $0 = p'(0) = a(u, v) - f(v)$. Concluimos

$$a(u, v) = f(v) \quad \text{para todo } v \in X.$$

Si $u \in X$ es solución de la formulación variacional, entonces

$$J(u + v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v, v) > J(u) \quad \text{para todo } 0 \neq v \in V,$$

es decir, u minimiza la energía. Por último, sean u_1, u_2 dos soluciones de la formulación variacional, entonces $a(u_1 - u_2, v) = 0$ para todo $v \in X$, lo que implica $a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$. La condición de positividad de a implica entonces $u_1 - u_2 = 0$. \square

Lema 8. Sea X Hilbert, $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua, elíptica, y simétrica. Sea $f \in X'$ y $\emptyset \neq U \subset X$ un subconjunto cerrado y convexo. Entonces, la energía

$$J : \begin{cases} U \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \frac{1}{2}a(u, u) - f(u) \end{cases}$$

alcanza su mínimo, y el mínimo es único.

Proof. La elipticidad de a implica

$$J(v) \geq \frac{\alpha}{2}\|v\|_X^2 - \|f\|_{X'}\|v\|_X = \frac{1}{2\alpha}(\alpha\|v\|_X - \|f\|_{X'})^2 - \frac{\|f\|_{X'}^2}{2\alpha} \geq -\frac{\|f\|_{X'}^2}{2\alpha}.$$

Es decir, J está acotada por abajo. Sea $M := \inf_{v \in U} J(v)$ y $(v_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en U con $J(v_n) \rightarrow M$. Calculamos

$$\begin{aligned} \alpha\|v_n - v_m\|_X^2 &\leq a(v_n - v_m, v_n - v_m) = 2a(v_n, v_n) + 2a(v_m, v_m) - a(v_n + v_m, v_n + v_m) \\ &= 4J(v_n) + 4J(v_m) - 8J\left(\frac{v_n + v_m}{2}\right) \end{aligned}$$

Dado que U es convexo, concluimos $\frac{v_n+v_m}{2} \in U$ y por lo tanto

$$\alpha \|v_n - v_m\|_X^2 \leq 4J(v_n) + 4J(v_m) - 8M \rightarrow 0 \quad \text{para } n, m \rightarrow \infty.$$

Entonces $(v_n)_{n=1}^\infty$ es Cauchy, y tiene límite $u \in X$. Dado que U es cerrado, tenemos $u \in U$, y por la continuidad de J

$$J(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = M = \inf_{v \in U} J(U).$$

Si $u_1, u_2 \in U$ son dos elementos donde J alcanza su mínimo. Definimos una sucesión por $(u_1, u_2, u_1, u_2, \dots)$. Obviamente, la energía de esta sucesión es M , y por lo de arriba la sucesión converge. Eso implica $u_1 = u_2$. \square

2.2 El método de Galerkin

Ahora sea $X_h \subset X$ un subespacio cerrado de X . En particular, si X_h es de dimension finita, entonces está cerrado. El lema de Lax-Milgram también aplica para X_h , y así garantiza única solución $u_h \in X_h$ tal que

$$a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \text{para todo } v_h \in X_h.$$

Esta técnica de discetización se llama *método de Galerkin*. Podemos definir un funcional

$$\mathbb{G}_h : X \rightarrow X_h,$$

donde

$$a(\mathbb{G}_h u, v_h) = a(u, v_h) \quad \text{para todo } v_h \in X_h.$$

En otras palabras, \mathbb{G}_h se caracteriza por la *ortogonalidad de Galerkin*

$$a(u - \mathbb{G}_h u, v_h) = 0 \quad \text{para todo } v_h \in X_h. \quad (2.5)$$

El primer resultado nos dice que \mathbb{G}_h es una proyección, y que es continua independientemente del espacio X_h que usamos.

Lema 9. *Supongamos las condiciones de Teorema 6. Entonces, $\mathbb{G}_h : X \rightarrow X_h$ es lineal, continuo*

$$\|\mathbb{G}_h u\|_X \leq \frac{M}{\alpha} \|u\|_X,$$

y una proyección, es decir, $\mathbb{G}_h u_h = u_h$ para todo $u_h \in X_h$.

Proof. Obviamente, \mathbb{G}_h es lineal, pues, a lo es. Para la continuidad, usamos la elipticidad y continuidad de a y la ortogonalidad (2.5)

$$\alpha \|\mathbb{G}_h u\|_X^2 \leq a(\mathbb{G}_h u, \mathbb{G}_h u) = a(u, \mathbb{G}_h u) \leq M \|u\|_X \|\mathbb{G}_h u\|_X.$$

Por la elipticidad de a y la ortogonalidad de Galerkin (2.5) concluimos, usando $u_h - \mathbb{G}_h u_h \in X_h$,

$$\alpha \|u_h - \mathbb{G}_h u_h\|_X^2 \leq a(u_h - \mathbb{G}_h u_h, u_h - \mathbb{G}_h u_h) = 0,$$

por lo tanto $u_h = \mathbb{G}_h u_h$. □

Por el último resultado se llama \mathbb{G}_h la *proyección de Galerkin*. El siguiente resultado nos dice que la proyección de Galerkin $\mathbb{G}_h u$ es, modulo constantes multiplicativos que no dependen de X_h , la mejor aproximación de u en X_h .

Lema 10. (*Lema de Céa*) *Supongamos las condiciones de Teorema 6. Sea $X_h \subset X$ de dimension finita. Entonces,*

$$\|u - \mathbb{G}_h u\|_X \leq \frac{M}{\alpha} \min_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X.$$

Proof. Por la elipticidad (2.2) de a , la ortogonalidad de Galerkin (2.5), y la continuidad (2.1) de a concluimos

$$\|u - \mathbb{G}_h u\|_X^2 \leq \frac{1}{\alpha} a(u - \mathbb{G}_h u, u - \mathbb{G}_h u) = \frac{1}{\alpha} a(u - \mathbb{G}_h u, u - v_h) \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \mathbb{G}_h u\|_X \|u - v_h\|_X$$

para cada $v_h \in X_h$. Entonces podemos tomar el infimo sobre $v_h \in X_h$. Dado que $X_h \subset X$ es de dimension finita, el infimo se alcanza (por ejemplo por la proyección ortogonal de u en X_h). □

El parametro $h > 0$ será la resolución del espacio X_h , como en una dimension. Al final vamos a usar h mas y mas pequeño para obtener una sucesión de soluciones discretas que convergen a la solución exacta u . El siguiente resultado muestra que esta sucesión converge si los espacios X_h aproximan bien un subespacio denso.

Proposition 11. *Para $h > 0$ sea $X_h \subset X$ un subespacio de dimension finita, y supongamos las condiciones de Teorema 6. Sea $D \subset X$ un subespacio denso con la propiedad*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \min_{v_h \in X_h} \|v - v_h\|_X = 0 \quad \text{para todo } v \in D.$$

Entonces, para todo $u \in X$, se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - \mathbb{G}_h u\|_X = 0.$$

Proof. tbc □

Chapter 3

Espacios de Sobolev

Los espacios de Sobolev son espacios de funciones con cierta diferenciabilidad e integrabilidad. Históricamente habían diferentes definiciones que resultaron iguales. Un conjunto abierto, conexo, y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ lo llamamos *dominio*. Si $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ y $|\alpha| := \sum_{j=1}^d \alpha_j$ entonces usaremos la siguiente notación para derivadas

$$\partial_j^k f(x) := \frac{\partial}{\partial x_j} f(x), \quad \partial^\alpha f(x) := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_d^{\alpha_d} f(x),$$

Definimos

$$\begin{aligned} C^k(\Omega) &:= \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \partial^\alpha f \text{ existe para todo } 0 \leq |\alpha| \leq k\}, \\ C^k(\bar{\Omega}) &:= \left\{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^k(\mathbb{R}^d)\right\}, \\ C_0^\infty(\Omega) &:= \{f \in C^\infty(\Omega) \mid f \text{ tiene soporte compacto en } \Omega\}. \end{aligned}$$

Es importante notar que el último conjunto no es vacío. Efectivamente, se puede verificar que

$$\phi(x) := \begin{cases} e^{1/(|x|^2-1)} & |x| < 1, \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

satisface $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ para cada dominio Ω que contiene la esfera unitaria. Con un traslado y escalamiento adecuado se puede mostrar que para cada dominio abierto $U \subset \mathbb{R}^d$ existe una función positiva en $C_0^\infty(U)$. Para un dominio Ω se define el conjunto de funciones localmente integrables

$$L_{loc}^1(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in L^1(K) \text{ para todo } K \subset \Omega \text{ compacto}\}.$$

Recordamos el siguiente resultado.

Teorema 12. (*Teorema fundamental del cálculo variacional*) Sea $u \in L_{loc}^1(\Omega)$.

(i) Si $\int_\Omega u\varphi = 0$ para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, entonces $u = 0$ casi en todas partes.

(ii) Si $\int_{\Omega} u \partial_j \varphi = 0$ para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ y $j = 1, \dots, d$, entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $u = c$ casi en todas partes. □

Proof. tbc □

Para generalizar el concepto clásico de derivada, definimos lo siguiente.

Definición 13. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio y $u \in L_{loc}^1(\Omega)$. Se dice que $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ tiene una α -ésima derivada parcial débil, si existe $v \in L_{loc}^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u \partial^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

□

El siguiente resultado explica la definición particular de derivada débil.

Corolario 14. Sea $u \in L_{loc}^1(\Omega)$.

(i) Si v_1 y v_2 son α -ésimas derivadas débiles de u , entonces $v_1 = v_2$ casi en todas partes.

(ii) Si $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, entonces $\partial^\alpha u$ es una α -ésima derivada débil de u .

(iii) Si $\nabla u = 0$, entonces $u = c$ casi en todas partes.

Proof. tbc. □

Por el último resultado, podemos anotar la α -ésima derivada débil de u por $\partial^\alpha u$.

Ejemplo 15. Sea $\Omega = (-1, 1)$ y $f(x) = |x|$. Entonces la derivada débil de f existe y

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}.$$

□

Ahora podemos definir los espacios de Sobolev.

Definición 16. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio. Para $k \in \mathbb{N}_0$ definimos el espacio vectorial

$$H^k(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ para todo } 0 \leq |\alpha| \leq k\}.$$

Un producto interno en $H^k(\Omega)$ es

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} \partial^\alpha u \partial^\alpha v,$$

y este producto interno induce la norma

$$\|u\|_{H^k(\Omega)}^2 := \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Por definición, $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. □

Teorema 17. El espacio $H^k(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Proof. Vamos a usar el resultado conocido que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, y vamos a mostrar el enunciado solo para $m = 1$. Obviamente, $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)}$ es un producto interno, y falta solamente mostrar que $H^1(\Omega)$ es completo. Sea entonces $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$. En particular, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(\nabla u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy en $L^2(\Omega)$ y $L^2(\Omega)^d$. Por lo tanto, $u_n \rightarrow u$ en $L^2(\Omega)$ y $\nabla u_n \rightarrow g$ en $L^2(\Omega)^d$. Falta demostrar que g es el gradiente débil de u . Por la continuidad del producto interno en $L^2(\Omega)$ obtenemos para cualquier $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$(u, \partial_j \varphi)_{L^2(\Omega)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, \partial_j \varphi)_{L^2(\Omega)} = \lim_{n \rightarrow \infty} -(\partial_j u_n, \varphi)_{L^2(\Omega)} = -(g_j, \varphi)_{L^2(\Omega)}.$$

□

Historicamente el espacio $H^k(\Omega)$ fue introducido como $W^k(\Omega)$, y

$$H^k(\Omega) := \overline{\{v \in C^\infty(\Omega) \mid \|v\|_{H^k(\Omega)} < \infty\}}.$$

En 1964 se demostró en el paper con el título $H=W$ de Meyers y Serrin que los dos espacios son iguales.

Teorema 18 (Meyers y Serrin). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto. Entonces

$$\{v \in C^\infty(\Omega) \mid \|v\|_{H^k(\Omega)} < \infty\}$$

es denso en $H^k(\Omega)$. □

Definimos

$$H_0^k(\Omega) := \overline{\{v \in C_0^\infty(\Omega) \mid \|v\|_{H^k(\Omega)} < \infty\}}.$$

Para definir trazas de funciones sobre la frontera, nos podemos preguntar si $C^\infty(\overline{\Omega})$ es denso en $H^k(\Omega)$. Eso obviamente no es cierto para el caso $\Omega = (-1, 0) \cup (0, 1)$. Vamos a necesitar una condición adicional.

3.1 Dominios Lipschitz

Recordamos que una función $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con Ω abierto se llama Lipschitz, si existe una constante $L > 0$ tal que

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y| \quad \text{para todo } x, y \in \Omega.$$

Definición 19. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio con frontera $\Gamma = \partial\Omega$. Se dice que Ω es Lipschitz, si existen N dominios abiertos $Q^{(j)}$ y sistemas de coordenadas cartesianas (y_1, \dots, y_d) tal que

$$Q_{(j)} := \left\{ (y_1, \dots, y_d) \mid -a_k^{(j)} < y_k < a_k^{(j)}, \quad k = 1, \dots, d \right\},$$

tal que con $Q'_{(j)} := \left\{ (y_1, \dots, y_{d-1}) \mid -a_k^{(j)} < y_k < a_k^{(j)}, \quad k = 1, \dots, d-1 \right\}$ se tiene

(i) los $Q_{(j)}$ cubren Γ , es decir $\Gamma \subset \bigcup_{j=1}^N Q_{(j)}$,

(ii) para todo $j = 1, \dots, N$ existe una función Lipschitz $\phi_j : Q'_{(j)} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Gamma \cap Q_{(j)} = \left\{ (y', \phi_j(y')) \mid y' \in Q'_{(j)} \right\} \quad y \quad \Omega \cap Q_{(j)} = \left\{ (y', y_d) \mid y' \in Q'_{(j)}, y_d < \phi_j(y') \right\}$$

□

Se puede mostrar lo siguiente.

Teorema 20. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio Lipschitz y $k \in \mathbb{N}_0$. Entonces, $C^\infty(\overline{\Omega})$ es denso en $H^k(\Omega)$. En particular, dado que $C^\infty(\overline{\Omega}) \subset C^k(\overline{\Omega}) \subset H^k(\Omega)$, también se tiene la densidad de $C^k(\overline{\Omega})$ en $H^k(\Omega)$. □

Para dominios Lipschitz podemos definir trazas.

Teorema 21 (Teorema de trazas). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio Lipschitz. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{para todo } u \in C^1(\overline{\Omega}). \quad (3.1)$$

Particularmente, el operador lineal traza $\gamma : C^1(\overline{\Omega}) \rightarrow L^2(\Gamma)$ definido por $\gamma(u) = u|_\Gamma$ para $u \in C^1(\overline{\Omega})$ tiene única extensión $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$. Para el subespacio cerrado $H_0^1(\Omega) := \ker \gamma \subset H^1(\Omega)$, se tiene

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\{v \in C_0^\infty(\Omega) \mid \|v\|_{H^1(\Omega)} < \infty\}}.$$

Proof. Por la densidad de $C^\infty(\overline{\Omega})$ en $H^1(\Omega)$, es suficiente verificar (3.1). Por comodidad, sea $\Omega = (0, 1)^d$ y $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Sea $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave y acotada con soporte en $(-1/2, 1/2)$ y $\eta(0) = 1$. Entonces, con $(x_1, \dots, x_{d-1}) = x'$,

$$\begin{aligned} u(x', 0)^2 &= \eta(0)u(x', 0)^2 = - \int_0^1 \partial_d (\eta(x_d)u(x', x_d)^2) dx_d \\ &= - \int_0^1 \eta'(x_d)u(x', x_d)^2 + 2\eta(x_d)u(x', x_d)\partial_d u(x', x_d) dx_d. \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando $2ab \leq a^2 + b^2$,

$$u(x', 0)^2 \leq \|\eta'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_0^1 |u(x', x_d)|^2 dx_d + \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_0^1 |u(x', x_d)|^2 + |\partial_d u(x', x_d)|^2 dx_d.$$

Una integración en x' muestra el resultado. \square

Se puede demostrar que $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ no es sobreyectivo. Se define $H^{1/2}(\Gamma) := \text{img } \gamma$ con la norma

$$\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} := \inf_{u \in H^1(\Omega), \gamma u = g} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Por la densidad de $C^\infty(\overline{\Omega})$ en $H^1(\Omega)$ es evidente el próximo resultado.

Corolario 22 (Integración por parte). . Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio Lipschitz.

(i) Para $u, v \in H^1(\Omega)$ y $j = 1, \dots, d$

$$\int_{\Omega} u \partial_j v dx + \int_{\Omega} v \partial_j u dx = \int_{\Gamma} \gamma u \gamma v n_j ds,$$

donde $n \in \mathbb{R}^d$ es el vector normal a Γ .

(ii) Para $u \in H^1(\Omega)$ y $v \in H^1(\Omega)^d$,

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} v dx + \int_{\Omega} v \nabla u dx = \int_{\Gamma} uv \cdot n ds.$$

\square

Recordamos el siguiente resultado.

Teorema 23 (Inclusión de Sobolev). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio Lipschitz.*

- (i) **Inclusión continua de Sobolev:** *Sea $d/2 < k$. Entonces, se tiene la inclusión continua $H^k(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.*
- (ii) **Inclusión compacta de Rellich:** *Sea $\ell < k$. Entonces, la inclusión $H^k(\Omega) \subset H^\ell(\Omega)$ es compacta.*

□

Una aplicación del último resultado es lo siguiente.

Lema 24. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio Lipschitz. Sea $|\cdot|$ una seminorma continua en $H^1(\Omega)$ definida para constantes, es decir*

- (a) *cumple con las condiciones de ser norma menos la condición (ii),*
- (b) *existe $C_1 > 0$ tal que $|u| \leq C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}$ para todo $u \in H^1(\Omega)$,*
- (c) *$|c| = 0$ para $c \in \mathbb{R}$ implica que $c = 0$.*

Entonces, existe una constante $C_2 > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 (\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + |u|) \text{ para todo } v \in H^1(\Omega).$$

En particular, $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + |u|$ es una norma equivalente en $H^1(\Omega)$,

$$(1 + C_1)^{-1} (\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + |u|) \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq (1 + C_2) (\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + |u|) \text{ para todo } v \in H^1(\Omega).$$

Proof. Supongamos que no existe una constante C_2 tal como enunciado. Es decir, existe una sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $H^1(\Omega)$ tal que

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} > n (\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} + |u_n|).$$

Definimos $w_n := u_n / \|u_n\|_{L^2(\Omega)}$, y obtenemos

$$\|w_n\|_{L^2(\Omega)} = 1, \quad \|\nabla w_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{n}, \quad |w_n| \leq \frac{1}{n}. \quad (3.2)$$

En particular, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $H^1(\Omega)$, y dado que $H^1(\Omega)$ es Hilbert y por lo tanto reflexivo, podemos suponer que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente en $H^1(\Omega)$. Por el teorema de Rellich, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en $L^2(\Omega)$. Usando (3.2), concluimos que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es Cauchy en $H^1(\Omega)$ y por lo tanto $w_n \rightarrow w$ in $H^1(\Omega)$. Concluimos

$$\begin{aligned} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla w_n\|_{L^2(\Omega)} = 0, \\ |w| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |w_n| = 0, \\ \|w\|_{L^2(\Omega)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|_{L^2(\Omega)} = 1. \end{aligned}$$

Por la primera identidad, w tiene que ser constante, y por la segunda, $w = 0$. Sin embargo, eso contradice la última identidad. Concluimos la existencia de C_2 como enunciado. □

Corolario 25 (Desigualdad de Poincaré I). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio Lipschitz. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \left| \int_{\Omega} u \, dx \right| \right) \text{ para todo } u \in H^1(\Omega).$$

Proof. Vamos a aplicar lema 24 usando la seminorma

$$|u| := \left| \int_{\Omega} u \, dx \right|.$$

Obviamente, $|\cdot|$ es una seminorma, y

$$|u| = \left| \int_{\Omega} u \, dx \right| \leq \mu(\Omega)^{1/2} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \mu(\Omega)^{1/2} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Si $c \in \mathbb{R}$ y $\left| \int_{\Omega} c \, dx \right| = 0$, entonces obviamente $c = 0$. \square

Corolario 26 (Desigualdad de Poincaré II). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio Lipschitz. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma u\|_{L^2(\Gamma)} \right) \text{ para todo } u \in H^1(\Omega).$$

Proof. Vamos a aplicar lema 24 usando la seminorma

$$|u| := \|\gamma u\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Obviamente, $|\cdot|$ es una seminorma, y $|u| \leq C_{\text{tr}} \|u\|_{H^1(\Omega)}$ por el teorema 21 de la traza. Si $c \in \mathbb{R}$, entonces $\gamma c = c$ y, si $c = 0$, entonces obviamente $c = 0$. \square

En $H^k(\Omega)$ definimos la seminorma

$$|u|_{H^k(\Omega)}^2 := \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^{\alpha} u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Entonces podemos generalizar Corolario 14, (iii).

Corolario 27. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio. Sea $u \in H^k(\Omega)$ con $|u|_{H^k(\Omega)} = 0$. Entonces u es un polinomio de grado $k - 1$.* \square

Proof. Para un multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ y $x \in \mathbb{R}^d$ usaremos la notación $x^{\alpha} = \prod_{j=1}^d x_j^{\alpha_j}$. Notamos que para $|\alpha| = |\beta| = k$ tenemos $D^{\alpha} x^{\beta} = \delta_{\alpha, \beta}$. Ahora demostraremos el resultado usando inducción por k . Para $k = 1$, el resultado es justamente Teorema 12, (ii). Supongamos que el resultado se cumple para $k \in \mathbb{N}$. Sea $D^{\beta} u = 0$ para todo $|\beta| = k + 1$. Entonces, $\nabla D^{\alpha} u = 0$ para todo $|\alpha| = k$. Según Teorema 12, (ii) tenemos $D^{\alpha} u = c_{\alpha} \in \mathbb{R}$. Como mencionado arriba, tenemos $D^{\alpha'} \sum_{|\alpha|=k} c_{\alpha} x^{\alpha} = c_{\alpha'}$ para $|\alpha'| = k$, y por lo tanto $D^{\alpha'} (u - \sum_{|\alpha|=k} c_{\alpha} x^{\alpha}) = 0$ para todo $|\alpha'| = k$. Usando la hipótesis de inducción, concluimos que $u - \sum_{|\alpha|=k} c_{\alpha} x^{\alpha} \in \mathbb{P}_{k-1}$. \square

La desigualdad de Poincaré dice que

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \|u - c\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{para todo } u \in H^1(\Omega).$$

Usando la técnica de la demostración del lema (24), se puede demostrar lo siguiente. Usamos la letra \mathbb{P}_ℓ para denotar el espacio de los polinomios de grado menor o igual que $\ell \in \mathbb{N}_0$.

Lema 28 (Lema de Deny-Lions). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio Lipschitz. Sea $\Pi : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{P}_{k-1}$ la proyección ortogonal. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|u - \Pi u\|_{H^k(\Omega)} \leq C |u|_{H^k(\Omega)} \quad \text{para todo } u \in H^k(\Omega).$$

□

3.2 Formulaciones variacionales en espacios de Sobolev

Recordamos la notación $(u, v)_\Omega := \int_\Omega uv dx$.

3.2.1 El problema Dirichlet homogéneo

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio Lipschitz con frontera $\Gamma = \partial\Omega$. Dada una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, queremos hallar una función u tal que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{en } \Gamma. \end{aligned} \tag{3.3}$$

La formulación débil es la siguiente: dado $\ell \in H^{-1}(\Omega) := H_0^1(\Omega)'$, hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(\nabla u, \nabla v)_\Omega = \ell(v) \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.4}$$

Proposition 29. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio Lipschitz.*

(1) *Si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ es solución de (3.3), entonces $u \in H_0^1(\Omega)$, y u es solución de (3.4) con $\ell(v) = (f, v)_\Omega$.*

(2) *Si $\ell \in H^{-1}(\Omega)$, entonces (3.4) tiene única solución $u \in H_0^1(\Omega)$, y tenemos la estabilidad*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\ell\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

(3) *Si $f \in C(\overline{\Omega})$ y la solución u de (3.4) satisface $u \in C^2(\overline{\Omega})$, entonces u es solución de (3.3).*

Proof. Demostramos (1): Obviamente, $u \in H_0^1(\Omega)$. Para demostrar que u resuelve (3.4), notamos que ya en Proposition (1) hemos visto que

$$(\nabla u, \nabla v)_\Omega = \ell(v) \quad \text{para todo } v \in C_0^1(\overline{\Omega}),$$

en particular, para todo $v \in X := \{v \in C_0^\infty(\Omega) \mid \|v\|_{H^1(\Omega)} < \infty\}$. Notamos que la aplicacion $v \mapsto (\nabla u, \nabla v)_\Omega - \ell(v)$ es lineal, acotada en $H^1(\Omega)$, y desaparece para $v \in X$. Dado que $\overline{X} = H_0^1(\Omega)$ según Teorema 21, concluimos (3.4).

Demostramos (2): Por la desigualdad de Poincaré existe una constante $C_F > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_F (\nabla v, \nabla v)_\Omega \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega),$$

es decir, elipticidad de la forma bilineal del lado izquierdo en (3.4). Esta forma bilineal es acotada en $H^1(\Omega)$ por Cauchy-Schwarz,

$$(\nabla u, \nabla v)_\Omega \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Por el Lema de Lax-Milgram, la formulación (3.4) tiene única solución $u \in H_0^1(\Omega)$, y

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_F \|\ell\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Demostramos (3): Si $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$, entonces $u = 0$ en Γ por la definición del operador traza. Además, integración por parte muestra $(f + \Delta u, \varphi) = 0$ para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, y el Teorema fundamental del calculo variacional implica $-\Delta u = f$ in Ω . \square

3.2.2 El problema Neumann no homogéneo

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio Lipschitz con frontera $\Gamma = \partial\Omega$. Dadas funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $\phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, queremos hallar una función u tal que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \phi & \text{en } \Gamma. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Notamos que una solución (3.5) no es única, pues, si u es solución, entonces también $u + c$ para $c \in \mathbb{R}$. Para fijar la constante c , agregamos la condición adicional y definimos un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$,

$$H_\star^1(\Omega) := \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid \int_\Omega v \, dx = 0 \right\}.$$

Además, notamos que

$$-\int_\Omega f \, dx = \int_\Omega \Delta u \, dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = \int_\Gamma \phi \, ds,$$

es decir, los datos f y ϕ tienen que satisfacer

$$\int_\Omega f \, dx + \int_\Gamma \phi \, ds = 0.$$

La formulación variacional de (3.5) es lo siguiente: dado $\ell_1 \in \widetilde{H}^{-1}(\Omega) := H^1(\Omega)'$ y $\ell_2 \in H^{-1/2}(\Gamma) = H^{1/2}(\Gamma)'$, hallar $u \in H_\star^1(\Omega)$ tal que

$$(\nabla u, \nabla v)_\Omega = \ell_1(v) + \ell_2(\gamma v) \quad \text{para todo } v \in H^1(\Omega). \tag{3.6}$$

Proposition 30. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio Lipschitz.*

(i) *Sea Ω un dominio C^1 , es decir, el vector normal n existe en todas partes de Γ . Sea $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solución de (3.5). Entonces $u \in H^1(\Omega)$, y u es solución de la formulación variacional*

$$(\nabla u, \nabla v)_\Omega = (f, v)_\Omega + (\varphi, \gamma v)_\Gamma \quad \text{para todo } v \in H^1(\Omega).$$

(ii) *Dado $\ell_1 \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$ y $\ell_2 \in H^{-1/2}(\Gamma)$, la formulación variacional*

$$(\nabla u, \nabla v)_\Omega = \ell_1(v) + \ell_2(\gamma v) \quad \text{para todo } v \in H_\star^1(\Omega).$$

tiene única solución $u \in H_\star^1(\Omega)$.

(iii) *Supongamos que $\ell_1(1) + \ell_2(1) = 0$. Entonces la solución $u \in H_\star^1(\Omega)$ del punto (ii) resuelve (3.6), y existe una constante $C > 0$ que no depende de u, ℓ_1, ℓ_2 , tal que*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \lesssim C \left(\|\ell_1\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} + \|\ell_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \right).$$

Proof. (i) Obviamente $u \in H^1(\Omega)$, y la formulación variacional se obtiene para todo $v \in C^1(\overline{\Omega})$. Ambos lados de la formulación son funcionales lineales continuos en $H^1(\Omega)$, y por densidad se obtiene lo enunciado.

(ii) La forma bilineal al lado izquierdo es continua y elíptica en $H_\star^1(\Omega)$ por la desigualdad de Poincaré del Corolario (25). Además, notamos que el operador de traza $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ es continuo, pues por definición

$$\|\gamma v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \inf_{w \in H^1(\Omega), \gamma w = \gamma v} \|w\|_{H^1(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Por lo tanto, el lado derecho de la formulación variacional es un funcional lineal y continuo

$$\begin{aligned} |\ell_1(v) + \ell_2(\gamma v)| &\leq \|\ell_1\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\ell_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|\gamma v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq \left(\|\ell_1\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} + \|\ell_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \right) \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por el Lema de Lax-Milgram, la formulación variacional tiene única solución.

(iii) Podemos escribir todo $v \in H^1(\Omega)$ como $v = v_\star + c$ con $c = \int_\Omega v \, dx$ y $v_\star \in H_\star^1(\Omega)$. Dado que $\ell_1(c) + \ell_2(c) = 0$ por hipótesis, se concluye el resultado. La estabilidad es una simple consecuencia de usar $v = u$.

□

Chapter 4

Elementos finitos en dos dimensiones

Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ un triangulo abierto, es decir, \overline{K} es la envolvente convexa de tres puntos $x_K, y_K, z_K \in \mathbb{R}^2$ que no son colineales. Definimos el conjunto de nodos $\mathcal{N}_K := \{x_K, y_K, z_K\}$. Si $x \neq y \in \mathcal{N}_K$ son dos nodes, entonces definimos la cara $e := \{x + \lambda(y - x) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in [0, 1]\}$, y el conjunto de caras $\mathcal{E}_K := \{e \mid e \text{ es cara de } K\}$. El diametro de K es

$$h_K := \text{diam}(K) = \sup_{x, y \in K} \|x - y\| = \max_{x \neq y \in \mathcal{N}_K} \|x - y\| = \max_{e \in \mathcal{E}_K} h_e,$$

donde $h_e = \|x - y\|$ con la definición de la cara e arriba.

Definición 31. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un polígono. Un conjunto finito de triangulos

$$\mathcal{T} = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$$

se llama malla regular de Ω si

1. $K \cap K' = \emptyset$ para todo $K \neq K' \in \mathcal{T}$,
2. $\bigcup_{K \in \mathcal{T}} \overline{K} = \overline{\Omega}$,
3. Sean $K \neq K' \in \mathcal{T}$, entonces

$$\overline{K} \cap \overline{K'} = \begin{cases} \emptyset, \\ \text{un nodo } x \in \mathcal{N}_K \cap \mathcal{N}_{K'}, \\ \text{una cara } e \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{K'}. \end{cases}$$

Definimos el conjunto de nodos de la malla

$$\mathcal{N} := \bigcup_{K \in \mathcal{T}} \mathcal{N}_K, \quad \mathcal{N}_I := \mathcal{N} \cap \Omega, \quad \mathcal{N}_\Gamma := \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_I,$$

y la resolución global

$$h := \max_{K \in \mathcal{T}} h_K.$$

4.1 Elementos finitos \mathbb{P}_1

Para una malla \mathcal{T} sobre Ω se define el espacio discreto

$$\mathcal{S}^1(\mathcal{T}) := \{u \in H^1(\Omega) \mid u|_K \in \mathbb{P}_1 \text{ para todo } K \in \mathcal{T}\}.$$

Corolario 32. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio Lipschitz subdividido en dos dominios Lipschitz Ω_1, Ω_2 , es decir $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$. Sean γ_1 y γ_2 los operadores de traza en Ω_1 y Ω_2 , y sea $\Gamma_{12} := \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Sea $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función con $v|_{\Omega_k} \in H^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$. Entonces $v \in H^1(\Omega)$ si y solo si $\gamma_1 v = \gamma_2 v$ sobre Γ_{12} .

Proof. Sea $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Sea n_k es el vector normal al la frontera $\partial\Omega_k$. Sobre Γ_{12} tenemos $n_1 = -n_2$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \partial_j \varphi \, dx &= \int_{\Omega_1} v \partial_j \varphi \, dx + \int_{\Omega_2} v \partial_j \varphi \, dx \\ &= - \int_{\Omega_1} \varphi \partial_j v \, dx - \int_{\Omega_2} \varphi \partial_j v \, dx + \int_{\Gamma_{12}} \gamma_1 v \partial_j \varphi n_{1,j} + \int_{\Gamma_{12}} \gamma_2 v \partial_j \varphi n_{2,j} \\ &= - \int_{\Omega_1} \varphi \partial_j v \, dx - \int_{\Omega_2} \varphi \partial_j v \, dx + \int_{\Gamma_{12}} (\gamma_1 v - \gamma_2 v) \partial_j \varphi n_{1,j} \end{aligned}$$

Concluimos que $v \in H^1(\Omega)$ si y solo si $\gamma_1 v = \gamma_2 v$ sobre Γ_{12} . □

Por el último resultado, también podríamos haber definido

$$\mathcal{S}^1(\mathcal{T}) := \{u \in C(\overline{\Omega}) \mid u|_K \in \mathbb{P}_1 \text{ para todo } K \in \mathcal{T}\}.$$

Proposition 33. Sea \mathcal{T} una malla con nodos \mathcal{N} , sea $N := \#\mathcal{N}$ el número de nodos.

- (i) $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \subset H^1(\mathcal{T})$ es un subespacio de dimensión N .
- (ii) Para cada nodo $x \in \mathcal{N}$ define la función techo

$$\phi_x \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}), \quad \phi_x(y) = \delta_{xy}, \text{ para todo } y \in \mathcal{N}.$$

Entonces, $\mathcal{B} := \{\phi_x \mid x \in \mathcal{N}\}$ es una base de $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$, y se llama base nodal.

Notamos que el soporte de una función ϕ_x es el conjunto de todos los triangulos K que tienen x como nodo, es decir,

$$\text{supp } \phi_x = \bigcup_{\substack{K \in \mathcal{T} \\ x \in \mathcal{N}_K}} \overline{K}.$$

Para el problema Dirichlet homogéneo, definimos el espacio

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}) &:= \{u \in C(\overline{\Omega}) \mid u|_K \in \mathbb{P}_1 \text{ para todo } K \in \mathcal{T}\} \cap H_0^1(\Omega) \\ &= \{u \in C(\overline{\Omega}) \mid u|_K \in \mathbb{P}_1 \text{ para todo } K \in \mathcal{T}, u = 0 \text{ sobre } \Gamma\}. \end{aligned}$$

El espacio $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ tiene dimension $\#\mathcal{N}_I$, y su base nodal es $\mathcal{B}_0 = \{\phi_x \mid x \in \mathcal{N}_I\}$. Si reemplazamos el espacio $H_0^1(\Omega)$ en la formulación variacional (3.4) del problema Dirichlet homogéneo por $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$, obtenemos el **método de elementos finitos**: hallar $u_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ tal que

$$(\nabla u_h, \nabla v_h)_\Omega = \ell(v_h) \quad \text{para todo } v \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}). \quad (4.1)$$

Notamos que (4.1) es un sistema lineal, y por el Lema de Lax-Milgram tiene única solución $u_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$. Para el problema de Neumann, definimos el espacio

$$\mathcal{S}_*^1(\mathcal{T}) = \left\{ v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \mid \int_\Omega v_h \, dx = 0 \right\}.$$

Dado que la imagen del operador $I : v \mapsto \int_\Omega v \, dx$ tiene dimension 1 y $\mathcal{S}_*^1(\mathcal{T}) = \ker(I)$, obtenemos $\dim \mathcal{S}_*^1(\mathcal{T}) = \dim \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) - 1 = N - 1$. Si reemplazamos el espacio $H_*^1(\Omega)$ en la formulación variacional (3.6) del problema de Neumann por $\mathcal{S}_*^1(\mathcal{T})$, obtenemos el método de elementos finitos: hallar $u_h \in \mathcal{S}_*^1(\mathcal{T})$ tal que

$$(\nabla u_h, \nabla v_h)_\Omega = (f, v_h)_\Omega + (\phi, v_h)_\Gamma \quad \text{para todo } v_h \in \mathcal{S}_*^1(\mathcal{T}). \quad (4.2)$$

4.2 Implementación de elementos finitos en dos dimensiones

Para \mathcal{T} una malla sobre Ω , nuestro objetivo es determinar

$$u_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}) \text{ tal que } \int_{\Omega} \nabla u_h(x)^\top \nabla v_h(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v_h(x) dx \quad \text{para todo } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}). \quad (4.3)$$

Primero necesitamos una base de $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$, y tenemos que numerar sus elementos. Sea entonces $N = \#\mathcal{N}$ el número de nodos y $\mathcal{N} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ la lista de nodos de la malla. En códigos de elementos finitos, usualmente se tiene los nodos de la malla en una lista. Sea $M = \#\mathcal{N}_I$ el número de nodos interiores y supongamos por ahora que $\mathcal{N}_I = \{x_1, \dots, x_M\}$ y $\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_I = \{x_{M+1}, \dots, x_N\}$. Sea ϕ_x la función techo asociada al nodo x . Ya sabemos que $\mathcal{B}_0 = \{\phi_1, \dots, \phi_M\}$ es una base de $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$. Como en una dimensión, concluimos que si definimos la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ y el vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$ por

$$\mathbf{A}_{k,j} := \int_{\Omega} \nabla \phi_j(x)^\top \nabla \phi_k(x) dx, \quad \mathbf{b}_k := \int_{\Omega} f(x) \phi_k(x) dx,$$

entonces (4.3) es equivalente al sistema lineal

$$\text{hallar } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^M \text{ tal que } \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b},$$

y $u_h = \sum_{j=1}^M \mathbf{u}_j \phi_j$. Para fabricar \mathbf{A} y \mathbf{b} , se procede como en una dimensión. Escribimos

$$\mathbf{A}_{k,j} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j(x)^\top \nabla \phi_k(x) dx = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \nabla \phi_j(x)^\top \nabla \phi_k(x) dx,$$

y notamos que tenemos que pasar por los tres bucles sobre j, k , y $K \in \mathcal{T}$. En la práctica se usa ensamblaje por elementos, es decir, el bucle sobre $K \in \mathcal{T}$ es el bucle exterior. Dado que el soporte de una función techo ϕ_x es el conjunto de todos los triángulos que tienen x como nodo, los dos bucles interiores corren sobre todos los $x_j, x_k \in \mathcal{N}_K$. Obtenemos el siguiente pseudo-algoritmo.

Algorithm 2: Ensamblaje

Input: malla $\mathcal{T} = \{K\}$

- 1 $\mathbf{A} = 0, \mathbf{b} = 0;$
- 2 **for** $K \in \mathcal{T}$ **do**
- 3 **for** $x_j \in \mathcal{N}_K, j \in \{1, \dots, M\}$ **do**
- 4 **for** $x_k \in \mathcal{N}_K, k \in \{1, \dots, M\}$ **do**
- 5 $\mathbf{A}_{k,j} = \mathbf{A}_{k,j} + \int_K \nabla \phi_j^\top \nabla \phi_k$
- 6 **end**
- 7 $\mathbf{b}_j = \mathbf{b}_j + \int_K f \phi_k$
- 8 **end**
- 9 **end**

Output: matriz \mathbf{A} , vector \mathbf{b} .

Podemos representar un triángulo como una lista de los índices de sus tres nodos, por ejemplo $K \leftrightarrow [j, k, \ell]$. Esta representación induce el mapeo *local-a-global* a través de

$$\begin{aligned} l2g_K(1) &= j, \\ l2g_K(2) &= k, \\ l2g_K(3) &= \ell, \end{aligned}$$

y podemos escribir el algoritmo de ensamblaje como

Algorithm 3: Ensamblaje

Input: malla $\mathcal{T} = \{K\}$

```

1 A = 0, b = 0;
2 for  $K \in \mathcal{T}$  do
3   for  $j \in \{1, 2, 3\}, l2g_K(j) \in \{1, \dots, M\}$  do
4     for  $k \in \{1, 2, 3\}, l2g_K(k) \in \{1, \dots, M\}$  do
5        $\mathbf{A}_{l2g_K(k), l2g_K(j)} = \mathbf{A}_{l2g_K(k), l2g_K(j)} + \int_K \nabla \phi_{l2g_K(j)}^\top \nabla \phi_{l2g_K(k)}$ 
6     end
7      $\mathbf{b}_{l2g_K(j)} = \mathbf{b}_{l2g_K(j)} + \int_K f \phi_{l2g_K(j)}$ 
8   end
9 end
Output: matriz A, vector b.

```

Para calcular la integral

$$\int_K \nabla \phi_{l2g_K(j)}^\top \nabla \phi_{l2g_K(k)},$$

vamos a transformar a un *triángulo de referencia*

$$\hat{K} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\},$$

es decir, el triángulo con los nodos $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$. Si x_j, x_k, x_ℓ son los nodos de K , entonces podemos definir una aplicación afina $F_K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$F_K(x) = B_K x + c_K = (x_k - x_j | x_\ell - x_j)x + x_j.$$

En particular, $F_K(0, 0) = x_j$, $F_K(1, 0) = x_k$, y $F_K(0, 1) = x_\ell$. Por lo tanto, si definimos las tres funciones sobre \hat{K}

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1(x, y) &= 1 - x - y, \\ \hat{\phi}_2(x, y) &= x, \\ \hat{\phi}_3(x, y) &= y, \end{aligned}$$

entonces podemos observar $\hat{\phi}_m = \phi_{12g_K(m)} \circ F_K$. Recordamos la regla de la cadena para $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ suaves, entonces

$$\nabla(u \circ F)(x) = J_F(x)^\top \cdot \nabla u \circ F(x). \quad (4.4)$$

Dado que $J_{F_K} = B_K$, eso implica

$$\nabla \hat{\phi}_m = \nabla (\phi_{12g_K(m)} \circ F_K) = J_{F_K}^\top \nabla \phi_{12g_K(m)} \circ F_K = B_K^\top \nabla \phi_{12g_K(m)} \circ F_K.$$

También recordamos la formula de sustitución

$$\int_{F(\hat{\omega})} u(x) dx = |\det B| \int_{\hat{\omega}} u \circ F(\hat{x}) d\hat{x}. \quad (4.5)$$

Finalmente, calculamos

$$\begin{aligned} \int_K \nabla \phi_{12g_K(j)}^\top \nabla \phi_{12g_K(k)} &= |\det B_K| \int_{\hat{K}} \nabla \hat{\phi}_j^\top B_K^{-1} B_K^{-\top} \nabla \hat{\phi}_k \\ &= \frac{\det B_K}{2} \sum_{n,m=1}^2 \partial_n \hat{\phi}_j \mathbf{G}_{n,m} \partial_m \hat{\phi}_k, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{G} = B_K^{-1} B_K^{-\top}$, y hemos usado que \mathbf{G} y $\nabla \hat{\phi}_k$ son constantes sobre \hat{K} . Notamos entonces que los elementos de la matriz \mathbf{A} se pueden calcular analíticamente. En general, eso no es posible para el vector \mathbf{b} , pues, contiene una función f . Tenemos que usar una regla de integración numérica, como por ejemplo la regla mas simple

$$\int_K f \phi_{12g_K(j)} \approx \mu(K) f(m_K) \phi_{12g_K(j)}(m_K),$$

donde m_K es el centro de masa de K ,

$$m_K = \frac{x_j + x_k + x_\ell}{3}.$$

4.3 Análisis a priori

Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ la solución del problema Dirichlet homogéneo (3.4), y $u_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ solución de (4.1). Como en la introducción, nos interesa ahora el error $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ con respecto a la resolución global h de la malla. Por el lema de Céa, tenemos

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \min_{v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

Vamos a suponer que $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Por la inclusión continua de Sobolev, Teorema 23, sabemos que $u \in C(\overline{\Omega})$, y u desaparece sobre Γ . Podemos definir una función discreta $I_h(u) \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ por interpolación nodal

$$I_h(u) := \sum_{x \in \mathcal{N}} u(x) \phi_x.$$

Obtenemos entonces

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u - I_h(u)\|_{H^1(\Omega)},$$

y es suficiente analizar el lado derecho.

Primero, vamos a analizar el error localmente, es decir, $\|u - I_h(u)\|_{H^1(K)}$ para cada K . Para eso, vamos a transformar a nuestro triángulo de referencia \widehat{K} . Este argumento se llama *argumento de escalamiento*¹ en la literatura. Por lo tanto, primero deberíamos analizar el error de interpolación nodal en \widehat{K} .

Lema 34 (Bramble-Hilbert). *Sea \widehat{I} el operador de interpolación nodal en los tres nodos de \widehat{K} , es decir Entonces tenemos $\widehat{I} : H^2(\widehat{K}) \rightarrow \mathbb{P}_1$, y existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|v - \widehat{I}v\|_{H^k(\widehat{K})} \leq C |v|_{H^2(\widehat{K})}, \quad \text{para } k = 0, 1 \text{ y todo } v \in H^2(\widehat{K}).$$

Proof. Primero, según Teorema 23 (i), tenemos la inclusión continua $H^2(\widehat{K}) \subset C(\overline{\widehat{K}})$, por lo tanto, $\widehat{I} : H^2(\widehat{K}) \rightarrow \mathbb{P}_1$ está bien definido. Además, por equivalencia de normas en espacios de dimensión finita tenemos para $k = 0, 1$

$$\|\widehat{I}v\|_{H^k(\widehat{K})} \leq C_{\text{norma}} \|\widehat{I}v\|_{L^\infty(\widehat{K})} \leq C_{\text{norma}} \|v\|_{L^\infty(\widehat{K})} \leq C_{\text{norma}} C_{\text{sobolev}} \|v\|_{H^2(\widehat{K})}.$$

Sea $\Pi : L^2(\widehat{K}) \rightarrow \mathbb{P}_1$ la proyección ortogonal. Notamos que $\Pi v = \widehat{I}\Pi v$, y concluimos

$$\begin{aligned} \|v - \widehat{I}v\|_{H^k(\widehat{K})} &= \|v - \Pi v - \widehat{I}(v - \Pi v)\|_{H^k(\widehat{K})} \leq \|v - \Pi v\|_{H^k(\widehat{K})} + \|\widehat{I}(v - \Pi v)\|_{H^k(\widehat{K})} \\ &\leq (1 + C_{\text{norma}} C_{\text{sobolev}}) \|v - \Pi v\|_{H^2(\widehat{K})}. \end{aligned}$$

Por el Lema 28 de Deny-Lions concluimos el resultado. \square

¹scaling argument en inglés

El próximo paso será explicitar como se comportan las normas de Sobolev bajo transformaciones. Para transformar al triangulo de referencia usaremos la aplicación afina F_K . Recordamos que si $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es afina, es decir $F(x) = Bx + c$, entonces $J_F(x) = B$, y la regla de la cadena (4.4) se lee

$$\nabla(u \circ F)(x) = B^\top \nabla u \circ F. \quad (4.6)$$

Podemos reiterar este argumento y usar que las segundas derivadas de F desaparecen,

$$\partial_j \partial_k (u \circ F)(x) = \sum_{\ell=1}^2 \sum_{m=1}^2 B_{\ell j} B_{m k} \partial_\ell \partial_m u \circ F(x) \quad (4.7)$$

Teorema 35 (Formula de transformación). *Sean $\omega, \hat{\omega} \subset \mathbb{R}^2$ dominios Lipschitz. Sea $F(x) = Bx + c$ una aplicación afina con matriz $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ invertible y $F(\hat{\omega}) = \omega$. Entonces, para $u \in H^k(\omega)$ tenemos $u \circ F \in H^k(\hat{\omega})$, $0 \leq k \leq 2$, y*

$$|u \circ F|_{H^k(\hat{\omega})} \leq |\det B|^{-1/2} \|B\|_F^k |u|_{H^k(\omega)},$$

donde $\|B\|_F := (\sum_{j,k=1}^2 |B_{jk}|)^{1/2}$ es la norma de Frobenius de B .

Proof. Para $k = 0$, la desigualdad es, de hecho, una identidad y reduce a la formula de sustitución (4.5). Vamos a demostrar el caso $k = 1$. Sea $u \in H^1(\omega)$. Dado que ω es Lipschitz, existen funciones $u_n \in C^\infty(\bar{\omega})$ con

$$u_n \rightarrow u \text{ en } L^2(\omega), \quad \nabla u_n \rightarrow \nabla u \text{ en } [L^2(\omega)]^2.$$

La formula de sustitución implica que

$$u_n \circ F \rightarrow u \circ F \text{ en } L^2(\hat{\omega}), \quad \nabla u_n \circ F \rightarrow \nabla u \circ F \text{ en } [L^2(\hat{\omega})]^2.$$

Usando la regla de la cadena (4.6) para las u_n , y la última convergencia concluimos

$$\nabla(u_n \circ F) = B^\top \nabla u_n \circ F \rightarrow B^\top \nabla u \circ F \text{ en } L^2(\hat{\omega}).$$

Concluimos que

$$\nabla(u \circ F) = B^\top \nabla u \circ F,$$

en particular, $u \circ F \in H^1(\hat{\omega})$. Notamos que para un matriz M y un vector x se tiene $\|Mx\|_2 \leq \|M\|_F \|x\|_2$. Luego, usando la regla de sustitución,

$$|u \circ F|_{H^1(\hat{\omega})} = \|B^\top \nabla u \circ F\|_{L^2(\hat{\omega})} \leq \|B^\top\|_F \|\nabla u \circ F\|_{L^2(\hat{\omega})} \leq |\det B|^{-1/2} \|B\|_F |u|_{H^1(\omega)},$$

y concluimos el resultado para $k = 1$. El caso $k = 2$ sigue por el mismo argumento, usando (4.7). \square

Introducimos un poco de notación: sea e una cara tal que $h_K = h_e$ y ρ_K la altura de K sobre e , entonces

$$\mu(K) = \frac{h_K \rho_K}{2}.$$

Para controlar los términos $|\det B_K|$ y $\|B_K\|_F$, necesitamos el siguiente resultado.

Lema 36. *Sea K un triángulo abierto con nodos x_K, y_K, z_K . Sea $F_K(x) := Bx + c$ con*

$$c = x_K \in \mathbb{R}^2, \quad B = (y_K - x_K, z_K - x_K) \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

entonces B es regular y $F_K(\widehat{K}) = K$. Además,

$$|\det J_F(x)| = |\det B| = 2\mu(K),$$

y

$$\frac{h_K}{\sqrt{2}} \leq \|B\|_F \leq \sqrt{2}h_K, \quad \frac{1}{\rho_K\sqrt{2}} \leq \|B^{-1}\|_F \leq \frac{\sqrt{2}}{\rho_K}.$$

Proof. Primero, B es regular, y por la fórmula de sustitución (4.5),

$$\frac{1}{2}|\det B| = \mu(\widehat{K})|\det B| = \int_{\widehat{K}} |\det B| d\widehat{x} \int_K dx = \mu(K).$$

Observamos

$$\|B\|_F^2 = \|y_K - x_K\|_2^2 + \|z_K - x_K\|_2^2 \leq 2h_K^2$$

y

$$\|z_K - y_K\|_2 \leq \|z_K - x_K\|_2 + \|y_K - x_K\|_2 \leq \sqrt{2} (\|z_K - x_K\|_2^2 + \|y_K - x_K\|_2^2)^{1/2} = \sqrt{2}\|B\|_F,$$

es decir,

$$h_K \leq \max\{\|z_K - y_K\|_2, \|z_K - x_K\|_2, \|y_K - x_K\|_2\} \leq \sqrt{2}\|B\|_F.$$

Con eso concluimos las primeras desigualdades. Ahora,

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{pmatrix},$$

y por $|\det B| = 2\mu(K) = h_K\rho_K$,

$$\|B^{-1}\|_F = \frac{\|B\|_F}{|\det B|} = \frac{\|B\|_F}{h_K\rho_K}.$$

Con eso concluimos las últimas desigualdades, usando las primeras. \square

Finalmente, podemos mostrar las cotas de error de nuestro operador de interpolación nodal I_h .

Teorema 37. *Sea \mathcal{T} una malla de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con nodos \mathcal{N} . Definimos el interpolador nodal*

$$I_h : \begin{cases} H^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \\ u \mapsto \sum_{x \in \mathcal{N}} u(x) \phi_x. \end{cases}$$

Entonces existe una constante $C > 0$ tal que para cada $K \in \mathcal{T}$,

$$\begin{aligned} \|u - I_h u\|_{L^2(K)} &\leq Ch_K^2 |u|_{H^2(K)} \\ |u - I_h u|_{H^1(K)} &\leq C \frac{h_K^2}{\rho_K} |u|_{H^2(K)}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \|u - I_h u\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^2 |u|_{H^2(\Omega)} \\ |u - I_h u|_{H^1(\Omega)} &\leq Ch \max_{K \in \mathcal{T}} \frac{h_K}{\rho_K} |u|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Proof. Obviamente, las desigualdades (4.9) son una consecuencia de (4.8), por lo tanto vamos a mostrar solamente (4.8). Sea $K \in \mathcal{T}$ y $F_K : \widehat{K} \rightarrow K$ una aplicación afina asociada. Primero notamos que

$$(I_h u) \circ F_K = \widehat{I}(u \circ F_K).$$

Para $k = 0, 1$ aplicamos la fórmula de transformación, Teorema 35, para $\widehat{\omega} = K$, $\omega = \widehat{K}$, y $F = F_K^{-1}$. Notamos que si $F_K(x) = B_K x + c_K$, entonces $F_K^{-1}(x) = B_K^{-1}x + B_K^{-1}c_K$. Por lo tanto, obtenemos

$$\begin{aligned} |u - I_h(u)|_{H^k(K)} &= |u \circ F_K \circ F_K^{-1} - I_h(u) \circ F_K \circ F_K^{-1}|_{H^k(K)} \\ &\leq |\det B_K^{-1}|^{-1/2} \|B_K^{-1}\|_F^k |u \circ F_K - I_h(u) \circ F_K|_{H^k(\widehat{K})} \\ &\leq |\det B_K|^{1/2} \|B_K^{-1}\|_F^k |u \circ F_K - \widehat{I}(u \circ F_K)|_{H^k(\widehat{K})} \\ &\leq C |\det B_K|^{1/2} \|B_K^{-1}\|_F^k |u \circ F_K|_{H^2(\widehat{K})}, \end{aligned}$$

donde usamos el Lema 34 de Bramble-Hilbert en el último paso. Transformando de vuelta a K , es decir, aplicar Teorema 35, para $\widehat{\omega} = \widehat{K}$, $\omega = K$, y $F = F_K$, obtenemos

$$|u - I_h(u)|_{H^k(K)} \leq C \|B_K^{-1}\|_F^k \|B_K\|_F^2 |u|_{H^2(K)}.$$

Notamos que según Lema 36,

$$\|B_K^{-1}\|_F^k \|B_K\|_F^2 \leq \frac{2^{k/2}}{\rho_K^k} 2h_K^2,$$

lo que muestra (4.8). □

Observamos lo siguiente.

- (i) Para obtener convergencia de orden 1 en la resolución global de las mallas, necesitamos que las mallas cumplen

$$\max_{K \in \mathcal{T}} \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma$$

para un número $\sigma > 0$. El factor h_K/ρ_K mide la deformación de un elemento K , pues es una medida de diámetro versus area de K .

- (ii) Si queremos medir la convergencia en terminos de la resolución global h , entonces no tiene mucho sentido usar mallas \mathcal{T} donde hay elementos K con un diámetro menor que h , pues, no mejora la convergencia pero hace mas costoso el método.

Tomando en cuenta los dos comentarios, definimos lo siguiente.

Definición 38. Una malla \mathcal{T} se llama

- (i) σ -regular de forma (shape regular en inglés), si

$$\max_{K \in \mathcal{T}} \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma.$$

- (ii) τ -uniforme, si existe $\tau > 0$ tal que

$$\frac{\max_{K \in \mathcal{T}} h_K}{\min_{K \in \mathcal{T}} h_K} \leq \tau.$$

Corolario 39. Sea \mathcal{T} una malla regular y σ -regular de forma con resolución global h . Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ la solución del problema Dirichlet homogéneo (3.4), y $u_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ solución de (4.1). Si $u \in H^2(\Omega)$, entonces existe una constante $C > 0$ que depende de σ , tal que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch|u|_{H^2(\Omega)}.$$

Proof. Como mencionado al principio de esta sección, este resultado es una consecuencia del lema de Céa y del Teorema 37. Si $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, entonces $I_h(u) \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$, y por lo tanto

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \min_{v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u - I_h(u)\|_{H^1(\Omega)} \leq C\sigma h|u|_{H^2(\Omega)}.$$

□

4.4 Regularidad elíptica y aproximación con mallas graduadas

Sea $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ una sucesión de mallas regular de forma con resolución global h_ℓ . Ya sabemos que el método de elementos finitos converge con orden h_ℓ si la solución exacta $u \in H^2(\Omega)$. En el laboratorio hemos visto que si $u \notin H^2(\Omega)$, entonces el método **no** converge con orden h_ℓ . Nos preguntamos entonces si es posible determinar a priori la regularidad de u . En la literatura de EDP, esto se llama *regularidad elíptica*. La formulación variacional (3.4) del problema Dirichlet homogéneo permite $f \in H^{-1}(\Omega)$ y asegura que $u \in H_0^1(\Omega)$, es decir, u es dos ordenes más regular que f . Podemos esperar entonces que $f \in L^2(\Omega)$ implica $u \in H^2(\Omega)$. En una dimensión, eso es cierto.

Teorema 40. Sea $\Omega = (a, b)$ y $u \in H^1(\Omega)$ una función que cumple con

$$\int_a^b u'(x)v'(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega), \quad (4.10)$$

donde $f \in H^k(\Omega)$ para algún $k = 0, 1, 2, \dots$. Entonces $u \in H^{k+2}(\Omega)$, y existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^k(\Omega)}.$$

Proof. Mostramos el caso $k = 0$, el resto sigue con inducción. La identidad (4.10) implica

$$\int_a^b u'(x)v'(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx \quad \text{para todo } v \in C_0^\infty(\Omega),$$

es decir $u'' = -f \in L^2(\Omega)$, y por definición $u \in H^2(\Omega)$. □

Para dominios en \mathbb{R}^2 , la regularidad elíptica no es tan simple. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ solución del problema Dirichlet sobre Ω . Se puede mostrar que

1. Si $\partial\Omega$ es suave (en la Definición 19, (ii), los ϕ_j son C^∞), entonces $f \in H^k(\Omega)$ implica $u \in H^{k+2}(\Omega)$ para todo $k \geq 0$.
2. Si Ω es solamente Lipschitz y *convexo*, entonces $f \in L^2(\Omega)$ implica $u \in H^2(\Omega)$.

En el segundo punto, la convexidad del dominio es necesaria, como muestra el siguiente ejemplo. Usaremos la notación $B_r(0) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < r\}$.

Ejemplo 41. Sea $\omega \in (0, 2\pi)$, $\omega \neq \pi$, y $S(\omega) := \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \mid 0 < r < 1, 0 < \varphi < \omega\}$. Sea $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ con $\text{supp } \chi \subset B_{1/2}(0)$ y $\chi|_{B_{1/4}(0)} = 1$. Define en coordenadas polares la función $u_0(r, \varphi) := r^{\pi/\omega} \sin(\varphi\pi/\omega)$, y $u(r, \varphi) := \chi(r, \varphi)u_0(r, \varphi)$. Entonces

- (i) $u|_{\partial S(\omega)} = 0$,
- (ii) $u \in H_0^1(S(\omega))$,
- (iii) $-\Delta u \in C^\infty(\overline{S(\omega)})$,

(iv) $u \notin H^k(S(\omega))$ para $k \geq 1 + \pi/\omega$

□

Observamos entonces que si $\omega \geq \pi$ entonces el dominio $S(\omega)$ no es convexo, $u \notin H^2(S(\omega))$, pero $-\Delta u$ es suave hasta la frontera de $S(\omega)$. Eso indica que, aún si $f \in L^2(\Omega)$, los ángulos no convexos de un dominio Ω producen singularidades en la solución u que impiden que u tenga regularidad $H^2(\Omega)$. Para evitar un orden suboptimal de convergencia en este caso, una primera idea será usar mallas que se adaptan a las singularidades de u . Es decir, mallas no uniformes que son mas finas en los entornos de los ángulos no convexos donde se encuentran las singularidades. En este caso de mallas no uniformes no tendrá sentido hablar de convergencia con respecto a $h = \max_{K \in \mathcal{T}} h_K$, sino tenemos que caracterizar la convergencia en terminos del tamaño del problema, es decir, en terminos de $n := \dim S_0^1(\mathcal{T})$. Para dominios (intervalos) en \mathbb{R} , la relación entre h y n para mallas uniformes es $h \sim n^{-1}$, mientras para dominios en \mathbb{R}^2 la relación es $h \sim n^{-1/2}$. Es decir el orden optimal de convergencia en una dimension es n^{-1} . Vamos a demostrar que este orden se puede lograr con mallas *graduadas*. Para ello, sea $\Omega = (0, 1)$ y $u(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in (1/2, 1)$. Entonces $u \in H^1(\Omega) \setminus H^2(\Omega)$. Sea \mathcal{T} una malla dada por $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$. Analizaremos la expresión

$$\inf_{v_h \in S^1(\mathcal{T})} |u - v_h|_{H^1(\Omega)}.$$

(i) Sea \mathcal{T} uniforme, es decir, $x_j = jh$ con $h = n^{-1}$. Entonces, usando $u'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$,

$$\inf_{v_h \in S^1(\mathcal{T})} |u - v_h|_{H^1(\Omega)} \geq \inf_{v_h \in S^1(\mathcal{T})} \|(u - v_h)'\|_{L^2(x_0, x_1)} = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|u' - c\|_{L^2(x_0, x_1)}$$

Notamos que

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \|u' - c\|_{L^2(x_0, x_1)} = \|u' - \overline{u'}\|_{L^2(x_0, x_1)},$$

donde $\overline{u'}$ denota el promedio de u' ,

$$\overline{u'} = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} u'(s) ds = h^{\alpha-1}.$$

Además, por ortogonalidad,

$$\|u' - \overline{u'}\|_{L^2(x_0, x_1)}^2 = \|u'\|_{L^2(x_0, x_1)}^2 - \|\overline{u'}\|_{L^2(x_0, x_1)}^2 = \left(\frac{\alpha^2}{2\alpha - 1} - 1 \right) h^{2\alpha-1}.$$

Concluimos que

$$\inf_{v_h \in S^1(\mathcal{T})} |u - v_h|_{H^1(\Omega)} \geq Ch^{\alpha-1/2}.$$

En otras palabras, el termino a analizar no puede converger mas rapido que $n^{-(\alpha-1/2)}$ usando mallas uniformes.

- (ii) Sea \mathcal{T} una malla *graduada*, es decir, $x_j := \tilde{x}_j^\beta$ con un factor de graduación $\beta > 1$ a elegir y $\tilde{x}_j := jn^{-1}$. Observamos que esta malla se condensa en 0, donde se encuentra la singularidad de u . Primero, analizaremos las longitudes de los elementos $K_j = (x_j, x_{j+1})$. Para el primer elemento $K_0 = (x_0, x_1)$, observamos

$$h_{K_0} = x_1 - x_0 = \tilde{x}_1^\beta - \tilde{x}_0^\beta = \tilde{x}_1^\beta = n^{-\beta}. \quad (4.11)$$

Para los otros elementos K_j , $j \geq 1$, calculamos

$$\begin{aligned} h_{K_j} &= x_{j+1} - x_j = \tilde{x}_{j+1}^\beta - \tilde{x}_j^\beta = \beta \int_{\tilde{x}_j}^{\tilde{x}_{j+1}} s^{\beta-1} ds = \beta \int_{j/n}^{(j+1)/n} s^{\beta-1} ds = \beta n^{-\beta} \int_j^{j+1} s^{\beta-1} ds \\ &\leq \beta n^{-\beta} (j+1)^{\beta-1} = \beta n^{-\beta} \left(\frac{j+1}{j} \right)^{\beta-1} j^{\beta-1} \leq \beta n^{-1} \underbrace{\left(\frac{j}{n} \right)^{\beta-1}}_{=x_j^{(\beta-1)/\beta}} \underbrace{\sup_{j \in \mathbb{N}} \left(\frac{j+1}{j} \right)^{\beta-1}}_{\leq 2^{\beta-1}} \\ &\leq 2^{\beta-1} \beta n^{-1} x_j^{1-1/\beta}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Sea I_h el operador de interpolación nodal sobre \mathcal{T} , entonces

$$\inf_{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})} |u - v_h|_{H^1(\Omega)} \leq \|(u - I_h u)'\|_{L^2(\Omega)}.$$

Calculamos $u'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ y $(I_h u)'|_{K_0} = h_{K_0}^{\alpha-1}$ y concluimos con (4.11)

$$\|(u - I_h u)'\|_{L^2(K_0)}^2 \leq 2\|u'\|_{L^2(K_0)}^2 + 2\|(I_h u)'\|_{L^2(K_0)}^2 \leq Ch_{K_0}^{2\alpha-1} = Cn^{-\beta(2\alpha-1)}.$$

Además, usando los resultados de la demostración del Lema 4 y (4.12), concluimos para $j \geq 1$,

$$\begin{aligned} \|(u - I_h u)'\|_{L^2(K_j)}^2 &\leq h_{K_j}^2 \|u''\|_{L^2(K_j)}^2 \leq 2^{2\beta-2} \beta n^{-2} x_j^{2-2/\beta} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |u''(s)|^2 ds \\ &\leq 2^{2\beta-2} \beta n^{-2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} s^{2-2/\beta} |u''(s)|^2 ds = 2^{2\beta-2} \beta n^{-2} \alpha^2 (\alpha-1)^2 \int_{x_j}^{x_{j+1}} s^{2\alpha-2/\beta-2} ds. \end{aligned}$$

Concluimos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} \|(u - I_h u)'\|_{L^2(K_j)}^2 &\leq 2^{2\beta-2} \beta n^{-2} \alpha^2 (\alpha-1)^2 \int_{x_1}^1 s^{2\alpha-2/\beta-2} ds \\ &\leq 2^{2\beta-2} \beta n^{-2} \alpha^2 (\alpha-1)^2 \int_0^1 s^{2\alpha-2/\beta-2} ds \end{aligned}$$

La última integral es finita si $2\alpha - 2/\beta - 2 > -1$, es decir, si $\beta > 2/(2\alpha - 1)$. Concluimos entonces

$$\begin{aligned} \|(u - I_h u)'\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|(u - I_h u)'\|_{L^2(K_0)}^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \|(u - I_h u)'\|_{L^2(K_j)}^2 \\ &\leq C_{\alpha,\beta} \left(n^{-\beta(2\alpha-1)} + n^{-2} \right) \leq C_{\alpha,\beta} n^{-2} \end{aligned}$$

para

$$\beta > \max \left\{ 1, \frac{2}{2\alpha - 1} \right\}.$$

Es decir, sobre malla graduadas con factor β , se logra la convergencia optimal

$$\inf_{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})} |u - v_h|_{H^1(\Omega)} \leq C n^{-1}.$$

La misma idea funciona en \mathbb{R}^2 , donde hay que usar mallas graduadas en con respecto a la distancia a los ángulos no convexos. Fabricar mallas adaptadas requiere conocimiento de las singularidades de soluciones. Para muchas ecuaciones relevantes en la práctica no se conoce la estructura de las singularidades, en este caso será mejor tener un automatismo para detectar las partes del dominio que requieren una resolución mas fina.

4.5 Análisis a posteriori

Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ la solución del problema Dirichlet homogéneo (3.4) y $u_h \in \mathcal{T}$ su aproximación por elementos finitos sobre la malla \mathcal{T} . En la sección 4.3 analizamos el error $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ *a priori*. Es decir, analizamos el comportamiento del error con respecto a la resolución h sin calcular explícitamente u_h , usando solamente conocimiento de regularidad de u ,

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch |u|_{H^2(\Omega)}.$$

El término al lado derecho no lo podemos calcular, pues, u es desconocida. Por lo tanto, el análisis a priori nos entrega solamente información *cualitativa*. El objetivo del análisis *a posteriori*, por el otro lado, es obtener cotas de error *computables*, es decir, cotas de error que contienen solamente términos conocidos, en este caso f y u_h . En otras palabras, estas cotas las podemos determinar *después* de haber calculado u_h , y por eso se llama análisis *a posteriori*. Las cotas se llaman *estimadores de error a posteriori*, y los denotamos como

$$\eta = \eta(u_h, f, \mathcal{T}).$$

Definición 42. Un estimador a posteriori η se llama **confiable** para el error $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$, si existe una constante $C_{\text{rel}} > 0$ que no depende de u_h , f , y \mathcal{T} , tal que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{\text{rel}} \eta(u_h, f, \mathcal{T}).$$

Un estimador a posteriori η se llama **eficiente** para el error $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$, si existe una constante $C_{\text{eff}} > 0$ que no depende de u_h , f , y \mathcal{T} , tal que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \geq C_{\text{eff}} \eta(u_h, f, \mathcal{T}).$$

Si un estimador confiable es pequeño, podemos concluir que el error es pequeño. Si un estimador eficiente es grande, podemos concluir que el error es grande. Si un estimador es confiable y eficiente al mismo tiempo, entonces es una buena medida para el error. Además, nos interesan estimadores que son *locales*, es decir, que se pueden escribir como una suma sobre elementos

$$\eta^2(u_h, f, \mathcal{T}) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \eta_K^2(u_h, f, \mathcal{T}),$$

pues, información local nos permite distribuir los recursos computaciones en las partes del dominio donde se necesitan (este concepto se llama *adaptividad* y lo veremos en la próxima sección). En esta sección, vamos a desarrollar un estimador a posteriori *residual*, es decir, vamos a acotar la expresión

$$\|f + \Delta u_h\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{(f - \nabla u_h, \nabla v)_\Omega}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}.$$

Para ello, vamos a usar la ortogonalidad de Galerkin para introducir una función discreta $v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ que sea una buena aproximación a v . Dado que v es solamente $H_0^1(\Omega)$, no podemos usar la interpolación nodal. El remedio es desarrollar operadores de interpolación generalizada².

²*quasi-interpolation operators* en inglés.

4.5.1 El operador de Clemént

Para una función $v \in H^1(\Omega)$ no podemos usar interpolación nodal, pues evaluación en un punto no es una operación continua en $H^1(\mathbb{R}^2)$. Lo que si podemos hacer es calcular promedios: si $M \subset \mathbb{R}^2$ es un objeto geometrico, entonces usamos

$$u_M := \frac{1}{\mu(M)} \int_M u(x) dx$$

para denotar el promedio de una función $u \in L^2(M)$. Notamos que la desigualdad de Poincaré dice que

$$\|u - u_M\|_{L^2(M)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(M)}.$$

Para encontrar la dependencia de la constante C con respecto al dominio M podemos usar un argumento de escalamiento.

Lema 43. *Sea K un triangulo. Entonces existe una constante $C > 0$, tal que*

$$\|v - v_K\|_{L^2(K)} + h_K^{1/2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \|v - v_K\|_{L^2(e)} \leq Ch_K |v|_{H^1(K)}$$

para todo $v \in H^1(K)$. Además,

$$\|v\|_{L^2(K)} + h_K^{1/2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \|v\|_{L^2(e)} \leq Ch_K |v|_{H^1(K)}$$

para todo $v \in H^1(K)$ con $v|_e = 0$ para algún $e \in \mathcal{E}_K$.

Proof. Notamos que

$$v_K = \frac{1}{\mu(K)} \int_K v(x) dx = 2 \int_{\widehat{K}} v \circ F_K(x) dx = \frac{1}{\mu(\widehat{K})} \int_{\widehat{K}} v \circ F_K(x) dx = (v \circ F_K)_{\widehat{K}}. \quad (4.13)$$

Entonces, usando la formula de transformación y la Desigualdad de Poincaré I (Corolario 25) sobre \widehat{K} ,

$$\begin{aligned} \|v - v_K\|_{L^2(K)} &= |\det B_K^{-1}| \|v \circ F_K - (v \circ F_K)_{\widehat{K}}\|_{L^2(\widehat{K})} \\ &\leq C_{\text{poincare}} |\det B_K^{-1}| \|v\|_{H^1(\widehat{K})} \leq C_{\text{poincare}} h_K |v|_{H^1(K)}. \end{aligned}$$

Sea $e \in \mathcal{E}_K$, y $\widehat{e} \in \mathcal{E}_{\widehat{K}}$ tal que $F_K(\widehat{e}) = e$. Transformando de e a \widehat{e} , usando los teoremas de traza y la Desigualdad de Poincaré I, y transformando de \widehat{K} a K , llegamos a

$$\begin{aligned} \|v - v_K\|_{L^2(e)} &= h_e^{1/2} \|v \circ F_K - (v \circ F_K)_{\widehat{K}}\|_{L^2(\widehat{e})} \leq C_{\text{tr}} h_e^{1/2} \|v \circ F_K - (v \circ F_K)_{\widehat{K}}\|_{H^1(\widehat{K})} \\ &\leq C_{\text{tr}} C_{\text{poincare}} h_e^{1/2} |v \circ F_K|_{H^1(\widehat{K})} \leq C_{\text{tr}} C_{\text{P}} C_{\text{trafo}} h_e^{1/2} |v|_{H^1(K)}. \end{aligned}$$

La segunda desigualdad del enunciado se demuestra de la misma manera, usando la Desigualdad de Poincaré II (Corolario 26). \square

Vamos a calcular promedios sobre objetos geometricos mas complejos.

Definición 44. Sea \mathcal{T} una malla regular. Para $z \in \mathcal{N}$ se define el **patch nodal**

$$\omega_z = \{K \in \mathcal{T} \mid z \in \mathcal{N}_K\},,$$

para $K \in \mathcal{T}$ se define el **patch de elemento**

$$\omega_K = \{K' \in \mathcal{T} \mid \overline{K} \cap \overline{K'} \neq \emptyset\},$$

y para $e \in \mathcal{E}$ se define el **patch de eje**

$$\omega_e = \{K' \in \mathcal{T} \mid K' \in \omega_K \text{ para un } K \in \mathcal{T} \text{ con } e \in \mathcal{E}_K\}.$$

Aunque un patch ω formalmente es un conjunto de elementos, vamos a usar la notación ω también para el dominio

$$\left(\bigcup_{K \in \omega} \overline{K} \right)^\circ$$

Corolario 45. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio, \mathcal{T} una malla regular sobre Ω , σ -regular de forma. Entonces existe una constante $C_\sigma > 0$ que depende solamente de σ , tal que

$$(i) \quad \overline{K'} \cap \overline{K} \neq \emptyset \implies C_\sigma^{-1} h_K \leq h_{K'} \leq C_\sigma h_K.$$

$$(ii) \quad \#\omega_z \leq C_\sigma \text{ para todo } z \in \mathcal{N}.$$

Proof. Notamos que σ -regularidad de forma implica que

$$\frac{h_K}{\rho_k} \leq \sigma$$

para todo $K \in \mathcal{T}$. La última desigualdad implica que $h_K \sim h_e$ para todo $e \in \mathcal{E}_K$, y con eso concluimos (i). Además, todos los ángulos de K están acotados por abajo por una constante que depende solamente de σ , y con eso concluimos (ii). \square

Aún para patches podemos controlar la dependencia de la constante de Poincaré, como mostraremos ahora.

Lema 46. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio, \mathcal{T} una malla regular sobre Ω , σ -regular de forma. Entonces existe una constante $C > 0$ que depende solamente de σ , tal que para todos los nodos $z \in \mathcal{N}$*

$$\|v - v_K\|_{L^2(\omega_z)} \leq C \operatorname{diam}(\omega_z) |v|_{H^1(\omega_z)} \quad \text{para todo } K \in \omega_z \text{ y } v \in H^1(\Omega).$$

En consecuencia,

$$\|v - v_{\omega_z}\|_{L^2(\omega_z)} \leq C \operatorname{diam}(\omega_z) |v|_{H^1(\omega_z)} \quad \text{para todo } v \in H^1(\Omega).$$

Si $z \in \mathcal{N}_\Gamma$, entonces

$$\|v\|_{L^2(\omega_z)} \leq C \operatorname{diam}(\omega_z) |v|_{H^1(\omega_z)} \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Proof. La segunda desigualdad es una consecuencia de la primera, pues

$$\|v - v_{\omega_z}\|_{L^2(\omega_z)} = \min_{c \in \mathbb{R}} \|v - c\|_{L^2(\omega_z)} \leq \|v - v_{K'}\|_{L^2(\omega_z)}.$$

Para demostrar la primera desigualdad, vamos a proceder en varios pasos.

(1) Comparamos v_K y v_e para $e \in \mathcal{E}_K$. Dado que

$$v_K - v_e = \frac{1}{h_e} \int_e v_K - v(x) ds_x,$$

obtenemos con Hölder y con la primera desigualdad de Lema 43

$$|v_K - v_e| \leq \frac{1}{h_e} \int_e |v_K - v(x)| ds_x \leq \frac{1}{h_e^{1/2}} \left(\int_e |v_K - v(x)|^2 ds_x \right)^{1/2} \leq C |v|_{H^1(K)}.$$

(4) Sean $K, K' \in \mathcal{T}$ con $\overline{K} \cap \overline{K'} = e$. Entonces, usando (1),

$$\begin{aligned} \|v_K - v_{K'}\|_{L^2(K)} &= \mu(K)^{1/2} |v_K - v_{K'}| \leq \mu(K)^{1/2} (|v_K - v_e| + |v_e - v_{K'}|) \\ &\leq \mu(K)^{1/2} (|v|_{H^1(K)} + |v|_{H^1(K')}) \leq Ch_K |v|_{H^1(K \cup K')}. \end{aligned}$$

En el último paso también usamos que \mathcal{T} es σ -regular de forma.

(5) Finalmente consideramos

$$\|v - v_K\|_{L^2(\omega_z)}^2 = \sum_{K' \in \omega_z} \|v - v_{K'}\|_{L^2(K')}^2.$$

Para cada $K' \in \omega_z$ existen elementos $K' = K_0, K_1, \dots, K_n = K$ tal que

- $K_j \in \omega_z$,
- K_j todos diferentes,
- $\overline{K_j} \cap \overline{K_{j+1}} = e_j$.

En particular, $n \leq C_\sigma$. Concluimos

$$\|v - v_K\|_{L^2(K')}^2 = \|v - v_{K_n}\|_{L^2(K_0)}^2 \leq C_\sigma \left(\|v - v_{K_0}\|_{L^2(K_0)}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} \|v_{K_j} - v_{K_{j+1}}\|_{L^2(K_0)}^2 \right).$$

Dado $v_{K_j} \in \mathbb{R}$ y $h_{K_0} \leq C_\sigma h_{K_{j+1}}$ por Corolario 45, concluimos con (4),

$$\|v_{K_j} - v_{K_{j+1}}\|_{L^2(K_0)}^2 \leq C_\sigma \|v_{K_j} - v_{K_{j+1}}\|_{L^2(K_{j+1})}^2 \leq C_\sigma |v|_{H^1(K_j \cup K_{j+1})}^2.$$

Finalmente, usando otra vez la primera desigualdad de Lemma 43,

$$\|v - v_K\|_{L^2(K')}^2 \leq C_\sigma \left(h_{K_0}^2 |v|_{H^1(K_0)}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} h_{K_{j+1}}^2 |v|_{H^1(K_j \cup K_{j+1})}^2 \right) \leq C_\sigma \text{diam}(\omega_z)^2 |v|_{H^1(\omega_z)}^2.$$

La tercera desigualdad se demuestra de la misma manera, usando la segunda desigualdad de Lemma 43. \square

Lema 47 (Operador de Clément). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio, \mathcal{T} una malla sobre Ω , regular de forma con constante $\sigma > 0$. Entonces existe un operador $J_{\mathcal{T}} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ y una constante $C > 0$ que depende solamente de σ , tal que para todo $K \in \mathcal{T}$ y $e \in \mathcal{E}$,*

$$\begin{aligned} \|u - J_{\mathcal{T}}u\|_{L^2(K)} &\leq Ch_k |u|_{H^1(\omega_K)}, \\ |u - J_{\mathcal{T}}u|_{H^1(K)} &\leq C |u|_{H^1(\omega_K)}, \\ \|u - J_{\mathcal{T}}u\|_{L^2(e)} &\leq Ch_e^{1/2} |u|_{H^1(\omega_e)}. \end{aligned}$$

Proof. Se define

$$J_{\mathcal{T}}u := \sum_{z \in \mathcal{N}_T} u_{\omega_z} \phi_z.$$

Vamos a considerar primero el caso de $K \in \mathcal{T}$ tal que $\mathcal{N}_K \cap \mathcal{N}_\Gamma = \emptyset$, es decir, K no toca la frontera. Notamos que $(\sum_{z \in \mathcal{N}_K} \phi_z)|_K = 1$ y $(J_{\mathcal{T}}u)|_K = \sum_{z \in \mathcal{N}_K} u_{\omega_z} \phi_z$. Usando $\|\phi_z\|_{L^\infty(K)} \leq 1$ y la segunda desigualdad de Lemma 46,

$$\begin{aligned} \|u - J_{\mathcal{T}}u\|_{L^2(K)} &= \left\| \sum_{z \in \mathcal{N}_K} \phi_z u - \sum_{z \in \mathcal{N}_K} u_{\omega_z} \phi_z \right\|_{L^2(K)} \leq \sum_{z \in \mathcal{N}_K} \|\phi_z\|_{L^\infty(K)} \|u - u_{\omega_z}\|_{L^2(K)} \\ &\leq \sum_{z \in \mathcal{N}_K} \|\phi_z\|_{L^\infty(K)} \|u - u_{\omega_z}\|_{L^2(\omega_z)} \leq C \sum_{z \in \mathcal{N}_K} \text{diam}(\omega_z) |u|_{H^1(\omega_z)} \leq Ch_K |u|_{H^1(\omega_K)}. \end{aligned}$$

El mismo procedimiento, tomando en cuenta $\|\nabla\phi_z\|_{L^\infty(K)} \leq Ch_K^{-1}$,

$$\begin{aligned} |u - J\mathcal{T}u|_{H^1(K)} &= \left\| \sum_{z \in \mathcal{N}_K} \nabla(\phi_x(u - u_{\omega_z})) \right\|_{L^2(K)} \\ &\leq \sum_{z \in \mathcal{N}_K} \|\nabla\phi_z\|_{L^\infty(K)} \|u - u_{\omega_z}\|_{L^2(K)} + \|\phi_z\|_{L^\infty(K)} |u|_{H^1(K)} \\ &\leq C \sum_{z \in \mathcal{N}_K} |u|_{H^1(\omega_z)} + |u|_{H^1(K)} \leq C|u|_{H^1(\omega_K)}. \end{aligned}$$

En el caso de $\mathcal{N}_K \cap \mathcal{N}_\Gamma \neq \emptyset$ podemos aplicar el mismo procedimiento, usando la tercera desigualdad de Lemma 46. Para demostrar la última desigualdad, sea $e \in \mathcal{E}_K$. Transformamos a \widehat{K} y usamos el teorem de traza,

$$\begin{aligned} \|u - J\mathcal{T}u\|_{L^2(e)} &= h_e^{1/2} \|u \circ F_K - (J\mathcal{T}u) \circ F_K\|_{L^2(\widehat{e})} \\ &\leq C_{\text{tr}} h_e^{1/2} \|u \circ F_K - (J\mathcal{T}u) \circ F_K\|_{H^1(\widehat{K})} \\ &\leq Ch_e^{1/2} \left(\|u \circ F_K - (J\mathcal{T}u) \circ F_K\|_{L^2(\widehat{K})} + |u \circ F_K - (J\mathcal{T}u) \circ F_K|_{H^1(\widehat{K})} \right) \\ &\leq Ch_e^{1/2} (h_K^{-1} \|u - J\mathcal{T}u\|_{L^2(K)} + |u - J\mathcal{T}u|_{H^1(K)}) \\ &\leq Ch_e^{1/2} |u|_{H^1(\omega_e)}. \end{aligned}$$

□

4.5.2 Un estimador a posteriori residual

Teorema 48. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio, \mathcal{T} una malla regular sobre Ω , σ -regular de forma. Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ solución del problema Dirichlet homogéneo del Laplaciano (3.4), con $\ell(v) = \int_{\Omega} f v$, $f \in L^2(\Omega)$. Sea $u_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ su aproximación de elementos finitos (4.1). Entonces existe una constante $C > 0$ que depende solamente de σ , tal que

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}} \eta_K^2, \quad (4.14)$$

donde

$$\eta_K^2 := h_K^2 \|f\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_I} h_e \|\llbracket \partial_n u_h \rrbracket\|_{L^2(e)}^2.$$

Proof. Dado que $u - u_h \in H_0^1(\Omega)$, notamos primero que

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{(\nabla(u - u_h), \nabla v)_{\Omega}}{\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Para el residuo $R(v) := (\nabla(u - u_h), \nabla v)_{\Omega}$ calculamos

$$R(v) = (\nabla(u - u_h), \nabla v)_{\Omega} = (\nabla u, \nabla v)_{\Omega} - (\nabla u_h, \nabla v)_{\Omega} = (f, v)_{\Omega} - \sum_{K \in \mathcal{T}} (\nabla u_h, \nabla v)_K.$$

Recordamos que $u_h|_K \in \mathbb{P}_1$, por lo tanto obtenemos con integración por partes sobre K

$$(\nabla u_h, \nabla v)_K = \int_K \nabla u_h(x) \nabla v(x) dx = \sum_{e \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_I} \int_e \nabla u_h \cdot n_K v ds_x,$$

donde n_K es el vector normal sobre ∂K , puntado hacia afuera. Para $e \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_I$ sean K, K' los elementos que comparten e . Definimos

$$\llbracket \partial_n u_h \rrbracket|_e = n_K (\nabla u_h)|_K + n_{K'} (\nabla u_h)|_{K'}.$$

Por lo tanto,

$$R(v) = (f, v)_{\Omega} - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e \nabla u_h \cdot n_K v ds_x = (f, v)_{\Omega} - \sum_{e \in \mathcal{E}_I} \int_e \llbracket \partial_n u_h \rrbracket v ds_x$$

Sea $J_{\mathcal{T}}$ el Operador de Clemént del Lema 47, entonces la ortogonalidad de Galerkin implica

$$R(v) = (\nabla(u - u_h), \nabla v)_{\Omega} + (\nabla(u - u_h), \nabla(v - J_{\mathcal{T}}v))_{\Omega} = R(v - J_{\mathcal{T}}v).$$

Concluimos con Hölder y Lema 47

$$\begin{aligned}
|R(v)| &= |R(v - J_{\mathcal{T}}v)| \leq \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K |f(v - J_{\mathcal{T}}v)| + \sum_{e \in \mathcal{E}_I} |[\partial_n u_h](v - J_{\mathcal{T}}v)| ds_x \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}} \|f\|_{L^2(K)} \|v - J_{\mathcal{T}}v\|_{L^2(K)} + \sum_{e \in \mathcal{E}_I} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)} \|v - J_{\mathcal{T}}v\|_{L^2(e)} \\
&\lesssim \sum_{K \in \mathcal{T}} \|f\|_{L^2(K)} h_K \|\nabla v\|_{L^2(\omega_K)} + \sum_{e \in \mathcal{E}_I} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)} h_e^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_e)}.
\end{aligned}$$

Usando Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
|R(v)| &\lesssim \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \|f\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_K)}^2 \right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_I} h_e \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_I} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_e)}^2 \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Usando Corolario 45 podemos concluir

$$|R(v)|^2 \lesssim \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \sum_{K \in \mathcal{T}} \left(h_K^2 \|f\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_I} h_e \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)}^2 \right),$$

lo que muestra el resultado. \square

El último resultado muestra que el estimador $\eta := \sqrt{\sum_{K \in \mathcal{T}} \eta_K^2}$ es confiable. También se puede mostrar que es eficiente modulo *terminos de orden mayor*.

Lema 49. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio, \mathcal{T} una malla sobre Ω , regular de forma con constante $\sigma > 0$. Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ solución del problema Dirichlet homogéneo del Laplaciano (3.4) y $u_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ su aproximación de elementos finitos. Entonces existe una constante $C > 0$ que depende solamente de σ , tal que*

$$\eta^2 \leq C \left(\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \|f - f_K\|_{L^2(K)}^2 \right).$$

\square

Efectivamente, si consideramos mallas uniformes, entonces las *oscilaciones* $\sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \|f - f_K\|_{L^2(K)}^2$ convergen por lo menos con orden h^2 . Si f es un poco más regular que $L^2(\Omega)$, el orden de convergencia será más alto aún.

4.6 Refinamiento local de mallas

Supongamos que tenemos una malla \mathcal{T}_ℓ , y un conjunto de elementos marcados

$$\mathcal{M}_\ell = \{K_1, \dots, K_m \mid K_j \in \mathcal{T}_\ell\}$$

Nuestro objetivo es fabricar una malla $\mathcal{T}_{\ell+1}$ donde todos los elementos de \mathcal{M}_ℓ se han refinado. La primera restricción es no aumentar la constante σ de la regularidad de forma, pues, las constantes en todas nuestras cuotas dependen de ella. Una primer idea será entonces introducir los puntos medios de todos los elementos de \mathcal{M}_ℓ como nodos nuevos y refinar los elementos de \mathcal{M}_ℓ . En Figure 4.1 mostramos dos maneras distintas de refinamiento. Vamos a considerar solamente el

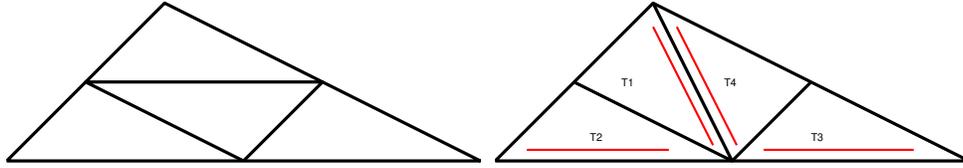


Figure 4.1: Izquierda: refinamiento *verde*. Derecha: refinamiento *bisección*.

refinamiento *bisección*, pues, es más fácil generalizarlo a dimensiones mayores. Si refinamos todos los elementos de \mathcal{M}_ℓ con *bisección*, lo que se produce no es una malla según nuestra definición, pues, se producen *nodos colgandos*, es decir, no se cumple con el punto 3. de Definición 31. Concluimos que tenemos que refinar elementos adicionales $K \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell$ para producir una malla $\mathcal{T}_{\ell+1}$, este paso se llama *cierre de la malla*. En lo que sigue, vamos a explicar un procedimiento que se llama *Newest Vertex Bisection*.

Supongamos que cada elemento $K \in \mathcal{T}_\ell$ tiene una cara destacada, la *cara de referencia*. En vez de elementos marcados vamos a pensar en *caras marcadas*. Para cada elemento marcado, marcamos todas sus caras,

$$\mathcal{M}_\ell^{(0)} := \{e \in \mathcal{E}_K \mid K \in \mathcal{M}_\ell\}.$$

Para hacer el cierre de la malla, consideramos todos los elementos que tienen una cara en $\mathcal{M}_\ell^{(0)}$ y marcamos también su cara de referencia,

$$\mathcal{M}_\ell^{(1)} := \mathcal{M}_\ell^{(0)} \cup \left\{ e \text{ cara de referencia de } K \mid \text{existe } e \in \mathcal{E}_K \text{ con } e \in \mathcal{M}_\ell^{(0)} \right\}.$$

Este procedimiento lo repetimos,

$$\mathcal{M}_\ell^{(k+1)} := \mathcal{M}_\ell^{(k)} \cup \left\{ e \text{ cara de referencia de } K \mid \text{existe } e \in \mathcal{E}_K \text{ con } e \in \mathcal{M}_\ell^{(k)} \right\},$$

hasta que $\mathcal{M}_\ell^{(k)} = \mathcal{M}_\ell^{(k+1)}$. En otras palabras, todos los elementos $K \in \mathcal{T}_\ell$ que tienen una cara en $\mathcal{M}_\ell^{(k)}$ también tienen su cara de referencia en $\mathcal{M}_\ell^{(k)}$. Ahora podemos refinar la malla. Cada

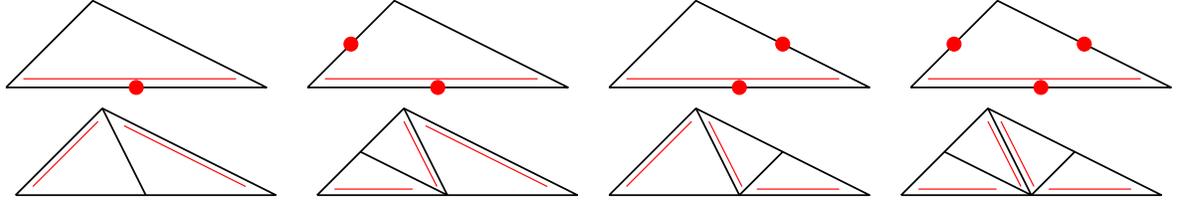


Figure 4.2: Newest Vertex Bisection: primera columna: *bisec1*, segunda y tercera columna: *bisec2*, última columna: *bisec3*.

elemento $K \in \mathcal{T}_\ell$ se refine según Figure 4.2, tomando en cuenta sus caras marcadas en $\mathcal{M}_\ell^{(k)}$, para fabricar la nueva malla $\mathcal{T}_{\ell+1}$. En Figure 4.2, las caras de referencia se señalan en rojo. Observamos que las caras de referencias de los elementos nuevos están al otro lado de los nodos nuevos. Eso explica el nombre *Newest Vertex Bisection*. También observamos que si \mathcal{T}_ℓ tiene caras de referencia, entonces las caras de referencia de $\mathcal{T}_{\ell+1}$ se eligen de manera automática.

Teorema 50. *Sea \mathcal{T}_0 una malla. Para cada $K \in \mathcal{T}_0$ elegimos una cara de referencia. Sea $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell=0}^\infty$ una sucesión de mallas, donde $\mathcal{T}_{\ell+1}$ se produce a partir de \mathcal{T}_ℓ usando newest vertex bisection. Entonces*

- (i) *Existe una constante $\sigma > 0$ que depende solamente de \mathcal{T}_0 , tal que todas las mallas \mathcal{T}_ℓ son regulares de forma con constante σ ,*
- (ii) *Existe una constante $C > 0$ que depende solamente de \mathcal{T}_0 , tal que*

$$\#\mathcal{T}_\ell \leq \#\mathcal{T}_0 + C \sum_{j=0}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_j.$$

□

Con respecto a la cota en (ii) observamos que es imposible acotar el número de elementos *refinados* por el número de elementos *marcados*, es decir, no existe una constante C independiente de ℓ tal que

$$\#\mathcal{T}_{\ell+1} \leq \#\mathcal{T}_\ell + C\#\mathcal{M}_\ell.$$

Sin embargo, la cota en (ii) dice que se puede controlar el efecto sumado.

4.7 Un algoritmo adaptativo

Antes de especificar un algoritmo adaptativo, realizamos una pequeña adaptación en nuestro estimador a posteriori residual. En vez de usar las contribuciones locales como en el Teorema 48,

usaremos las contribuciones

$$\eta_K^2 := \mu(K) \|f\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_I} \mu(K)^{1/2} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)}^2,$$

donde $\mu(K)$ es el area de K . Dado que

$$\mu(K) \leq h_K^2 \leq \frac{h_K^2}{\rho_K^2} \rho_K^2 \leq \sigma C \mu(K),$$

concluimos que el estimador a posteriori con las contribuciones recién mencionadas sigue cumpliendo con el Teorema 48 (confiabilidad) y el Lema 49 (eficiencia) para mallas σ -regulares de forma. Ahora podemos presentar nuestro algoritmo adaptativo.

Input: \mathcal{T}_0 una malla inicial de Ω con caras de referencia, parametro $\theta \in (0, 1]$. Define $\ell := 0$.

(i) calcula solución discreta $u_\ell \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell)$

(ii) calcula los indicadores locales

$$\eta_K^2 := \mu(K) \|f\|_{L^2(K)}^2 + \mu(K)^{1/2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \|[\partial_n u_\ell]\|_{L^2(e)}^2$$

y el estimador global $\eta_\ell^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_\ell} \eta_K^2$.

(iii) determina un conjunto \mathcal{M}_ℓ minimal (es decir, de menor cardinalidad), tal que

$$\theta \eta_\ell^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{M}_\ell} \eta_K^2. \quad (4.15)$$

(iv) determina la malla nueva $\mathcal{T}_{\ell+1}$ donde todos los elementos marcados se refinaron

(v) incrementa $\ell := \ell + 1$ y repite a partir de (i)

Comentario 51. El criterio (4.15) se llama criterio de Dörfler. La suma de los estimadores de error sobre los elementos marcados \mathcal{M}_ℓ contribuye un porcentaje fijo θ al estimador global $\eta_\ell^{1/2}$. El conjunto \mathcal{M}_ℓ tiene que ser minimal, es decir, de menor cardinalidad (obviamente, $\mathcal{M}_\ell = \mathcal{T}_\ell$ cumple con (4.15)). Notamos que \mathcal{M}_ℓ no necesariamente es único. Notamos que para $\theta = 1$, el algoritmo calcula una sucesión uniforme de mallas. Por otro lado, para θ muy pequeño, se producen mallas fuertemente adaptadas. Sin embargo, si θ es muy pequeño, en cada paso se van a refinar muy pocos elementos, y al final hay que hacer muchos pasos del algoritmo para llegar a una tolerancia razonable. Para obtener una buena solución intermedia entre mallas muy adaptadas y muchos pasos, se usa $\theta = 0.25$ en la práctica.

4.8 Convergencia del algoritmo adaptativo

Si la solución exacta u del problema Dirichlet homogéneo del Laplaciano (3.4) cumple con $u \in H^2(\Omega)$, entonces el Corolario 39 muestra que

$$\|\nabla(u - \mathbb{G}_\ell u)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch_\ell |u|_{H^2(\Omega)}$$

para $\mathbb{G}_\ell u \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell)$ la solución de elementos finitos (asumiendo que \mathcal{T}_ℓ es regular de forma), donde $h_\ell := \max_{K \in \mathcal{T}_\ell} h_K$. Es decir, si $u \in H^2(\Omega)$ y la sucesión de mallas $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ es tal que $h_\ell \rightarrow 0$, entonces

$$\|u - \mathbb{G}_\ell u\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0. \quad (4.16)$$

De hecho, no es necesario la regularidad $u \in H^2(\Omega)$ para obtener convergencia (4.16).

Lema 52. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio Lipschitz, y $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ una sucesión de mallas regular de forma con constante $\sigma > 0$ y $h_\ell \rightarrow 0$. Sea $u \in H_0^1(\Omega)$. Entonces*

$$\|u - \mathbb{G}_\ell u\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$$

Proof. Sabemos que $H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$. Sea C_P la constante de la desigualdad de Poincaré. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\tilde{u}_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|u - \tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \varepsilon / (2C_P).$$

Además,

$$\|\tilde{u}_\varepsilon - \mathbb{G}_\ell \tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch_\ell \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)}.$$

Dado que $h_\ell \rightarrow 0$, existe un L tal que para $\ell \geq L$ se tiene

$$\|\tilde{u}_\varepsilon - \mathbb{G}_\ell \tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \varepsilon / (2C_P).$$

Usando el lema de Céa observamos

$$\|u - \mathbb{G}_\ell u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_P \|u - \mathbb{G}_\ell u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_P \|u - \mathbb{G}_\ell \tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C_P \|u - \mathbb{G}_\ell \tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}.$$

La desigualdad de triángulo muestra el resultado. \square

Obviamente, no podemos garantizar que $h_\ell \rightarrow 0$ para las mallas producidas por nuestro algoritmo adaptativo. Para obtener convergencia (4.16) en este caso, vamos a tener que desarrollar otros argumentos. La primera observación es que las soluciones discretas $\mathbb{G}_\ell u$ del algoritmo adaptativo *siempre convergen* - no necesariamente a u .

Lema 53. *Sea H un espacio de Hilbert y $X_\ell \subset H$ subespacios discretos de dimensión finita con la propiedad $X_\ell \subset X_{\ell+1}$. Sea $\mathbb{P}_\ell : H \rightarrow X_\ell$ la proyección ortogonal. Entonces, para cada $u \in H$ existe $u_\infty \in H$ tal que $\mathbb{P}_\ell u \rightarrow u_\infty$. \square*

Proof. Definimos el espacio

$$X_\infty := \overline{\bigcup_{\ell=1}^{\infty} X_\ell}.$$

Notamos que X_∞ es cerrado por construcción, por lo tanto Hilbert, y existe la proyección ortogonal $P_\infty : H \rightarrow X_\infty$. Sea $k_\ell := \dim X_\ell$. Dado que los X_ℓ tienen dimensión finita y $X_\ell \subset X_{\ell+1}$, podemos usar el procedimiento de Gram-Schmidt para encontrar un sistema ortonormal $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ en X_∞ tal que $(\varphi_j)_{j=1}^{k_\ell}$ es una base de X_ℓ . Por construcción, el span de $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ es denso en X_∞ , y un resultado de análisis funcional nos dice que cada $v \in X_\infty$ tiene la representación

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} (v, \varphi_j)_H \varphi_j.$$

Para $u \in H$ vemos

$$P_\infty u = \sum_{j=1}^{\infty} (P_\infty u, \varphi_j)_H \varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty} (u, \varphi_j)_H \varphi_j.$$

Dado que $P_\ell u = \sum_{j=1}^{k_\ell} (u, \varphi_j)_H \varphi_j$, obtenemos $P_\ell u \rightarrow P_\infty u$. □

Observamos entonces lo siguiente. Si $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell=0}^{\infty}$ es una sucesión de mallas con $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell) \subset \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_{\ell+1})$, entonces se cumple el marco del último lema, usando $H = (H_0^1(\Omega), \|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)})$ y $X_\ell = \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell)$. En este caso, $\mathbb{G}_\ell = \mathbb{P}_\ell$, y por lo tanto $\mathbb{G}_\ell u \rightarrow u_\infty \in H_0^1(\Omega)$.

- (i) Si la sucesión $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell=0}^{\infty}$ cumple con $h_\ell \rightarrow 0$, entonces $X_\infty = H$, es decir $u_\infty = P_\infty u = P_H u = u$, y por lo tanto $\|\nabla(u - \mathbb{G}_\ell u)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$. Eso ya sabemos de Lema 52. Este caso aplica a una sucesión de mallas uniformes, por ejemplo.
- (ii) Si la sucesión $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell=0}^{\infty}$ **no** cumple con $h_\ell \rightarrow 0$, entonces $X_\infty \neq H$. El Lema 53 dice que $\mathbb{G}_\ell u$ converge a un elemento u_∞ , pero dado que $X_\infty \neq H$ no podemos concluir que $u_\infty = u$. Este caso aplica en primer instancia a nuestro algoritmo adaptativo.

Para poder concluir $\mathbb{G}_\ell u \rightarrow u$ aún en el caso del algoritmo adaptativo, usaremos el próximo resultado. Para \mathcal{T}_ℓ una malla, $u_\ell = \mathbb{G}_\ell u$ sea la aproximación a u de elementos finitos. Para una función discreta $v_\ell \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell)$ y un elemento $K \in \mathcal{T}_\ell$ usaremos la notación

$$\eta_\ell(K, v_\ell)^2 := \mu(K) \|f\|_{L^2(K)}^2 + \mu(K)^{1/2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_I} \|[\partial_n v_\ell]\|_{L^2(e)}^2.$$

Para un subconjunto $\mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{T}_\ell$ escribiremos

$$\eta_\ell(\mathcal{M}_\ell, v_\ell)^2 := \sum_{K \in \mathcal{M}_\ell} \eta_\ell(K, v_\ell)^2, \quad \text{y en particular } \eta_\ell(v_\ell)^2 := \eta_\ell(\mathcal{T}_\ell, v_\ell)^2.$$

Teorema 54 (Reducción del estimador). *Sea $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell=0}^\infty$ una sucesión de mallas construidas con Newest Vertex Bisection, en particular $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell) \subset \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_{\ell+1})$. Sea \mathcal{M}_ℓ el conjunto de elementos de \mathcal{T}_ℓ que se tienen que refinar para generar $\mathcal{T}_{\ell+1}$. Sea $(u_\ell)_{\ell=0}^\infty$ con $u_\ell \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell)$ una sucesión de funciones discretas. Si con un $\theta \in (0, 1)$ se cumple*

$$\theta \eta_\ell(u_\ell)^2 \leq \eta_\ell(\mathcal{M}_\ell, u_\ell)^2, \quad \text{para todo } \ell > 0,$$

entonces se tiene la siguiente reducción del estimador: existe $\rho \in (0, 1)$ tal que para todo $\delta > 0$ existe una constante $C_\delta > 0$ tal que

$$\eta_{\ell+1}(u_{\ell+1})^2 \leq (1 + \delta) \rho \eta_\ell(u_\ell)^2 + C_\delta \|\nabla(u_{\ell+1} - u_\ell)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Proof. Primero sean $v_\ell, w_\ell \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell)$. Entonces la desigualdad del triángulo implica

$$\begin{aligned} \eta_\ell(v_\ell) &= \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_\ell} \mu(K) \|f\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_I} \mu(K)^{1/2} \|[\partial_n v_\ell]\|_{L^2(e)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_\ell} \mu(K) \|f\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_I} \mu(K)^{1/2} \|[\partial_n w_\ell]\|_{L^2(e)}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_\ell} \sum_{e \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_I} \mu(K)^{1/2} \|[\partial_n (v_\ell - w_\ell)]\|_{L^2(e)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Transformación al elemento de referencia y el teorema de traza muestra

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_\ell} \sum_{e \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_I} \mu(K)^{1/2} \|[\partial_n (v_\ell - w_\ell)]\|_{L^2(e)}^2 \right)^{1/2} \leq C \|\nabla(v_\ell - w_\ell)\|_{L^2(\Omega)},$$

así que

$$\eta_\ell(v_\ell) \leq \eta_\ell(w_\ell) + C \|\nabla(v_\ell - w_\ell)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Notamos que $v_\ell \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell) \subset \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_{\ell+1})$. Si $K \in \mathcal{M}_\ell$ y $K' \in \mathcal{T}_{\ell+1}$ con $K' \subset K$ es uno de sus hijos, entonces $\mu(K') \leq \mu(K)/4$. Además, si e es un eje de K' en el interior de K , notamos que $[\partial_n v_\ell]|_e = 0$. Por lo tanto,

$$\sum_{K' \text{ hijos de } K} \eta_{\ell+1}^2(v_\ell, K') \leq \frac{1}{2} \eta_\ell(v_\ell, K)^2,$$

es decir,

$$\sum_{\substack{K' \in \mathcal{T}_{\ell+1} \\ K' \text{ es hijo de } K \in \mathcal{M}_\ell}} \eta_{\ell+1}(v_\ell, K')^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{M}_\ell} \eta_\ell(v_\ell, K)^2 = \frac{1}{2} \eta_\ell(v_\ell, \mathcal{M}_\ell)^2$$

Por otro lado,

$$\sum_{\substack{K' \in \mathcal{T}_{\ell+1} \\ K' \text{ no es hijo de } K \in \mathcal{M}_\ell}} \eta_{\ell+1}(v_\ell, K')^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell} \eta_\ell(v_\ell, K') = \eta_\ell(v_\ell, \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell)^2 = \eta_\ell(v_\ell)^2 - \eta_\ell(v_\ell, \mathcal{M}_\ell)^2.$$

Concluimos

$$\begin{aligned} \eta_{\ell+1}(u_\ell)^2 &= \eta_{\ell+1}(u_\ell, \mathcal{T}_{\ell+1})^2 = \sum_{\substack{K' \in \mathcal{T}_{\ell+1} \\ K' \text{ es hijo de } K \in \mathcal{M}_\ell}} \eta_{\ell+1}(u_\ell, K')^2 + \sum_{\substack{K' \in \mathcal{T}_{\ell+1} \\ K' \text{ no es hijo de } K \in \mathcal{M}_\ell}} \eta_{\ell+1}(u_\ell, K')^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{2} - 1\right) \eta_\ell(u_\ell, \mathcal{M}_\ell)^2 + \eta_\ell(u_\ell)^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{2} - 1\right) \theta \eta_\ell(u_\ell)^2 + \eta_\ell(u_\ell)^2 \\ &= \eta_\ell(u_\ell)^2 \left(1 - \frac{\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

Con $\rho := (1 - \theta/2)$ concluimos con la desigualdad de Young

$$\begin{aligned} \eta_{\ell+1}(u_{\ell+1})^2 &\leq (1 + \delta) \eta_{\ell+1}(u_\ell)^2 + C_\delta \|\nabla(u_{\ell+1} - u_\ell)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq (1 + \delta) \rho \eta_\ell(u_\ell)^2 + C_\delta \|\nabla(u_{\ell+1} - u_\ell)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

□

Como consecuencia del Lema 53 y del Teorema 54 concluimos el siguiente resultado.

Corolario 55 (Convergencia del algoritmo adaptativo). *Sea $(u_\ell)_{\ell=0}^\infty$ la sucesión de soluciones del algoritmo adaptativo. Entonces $u_\ell \rightarrow u$ en $H^1(\Omega)$.*

Proof. Según Teorema 54,

$$\eta_{\ell+1}^2 \leq (1 + \delta)\rho\eta_\ell^2 + C_\delta\|\nabla(u_{\ell+1} - u_\ell)\|_{L^2(\Omega)}$$

para todo $\delta > 0$. Fijamos δ tal que $\kappa := (1 + \delta)\rho < 1$. Según Lema 53, la sucesión

$$\alpha_\ell := C_\delta\|\nabla(u_{\ell+1} - u_\ell)\|_{L^2(\Omega)}$$

converge a 0. Por lo tanto,

$$\eta_{\ell+1}^2 \leq \kappa\eta_\ell^2 + \alpha_\ell,$$

y concluimos que $\eta_\ell \rightarrow 0$. Dado que η_ℓ es confiable, concluimos $u_\ell \rightarrow u$. □

4.9 El lemma de Strang

4.10 Error de elementos finitos en otras normas

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio Lipschitz, \mathcal{T} una malla sobre Ω . Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ solución del problema Dirichlet homogéneo del Laplaciano (3.4) y $u_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ su aproximación de elementos finitos. Ya sabemos que el error en H^1 converge con orden h , es decir

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

En esta sección nos preguntamos si podemos obtener una cota mejor al medir el error en una norma más débil, por ejemplo en $L^2(\Omega)$. Los argumentos que se ocupan en este caso se llaman *argumentos de dualidad* o *truco de Aubin-Nitsche*.

En la sección 4.4 hemos visto que si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es Lipschitz y convexo y $v \in H_0^1(\Omega)$ es la solución débil de $-\Delta v = f$, entonces $f \in L^2(\Omega)$ implica $v \in H^2(\Omega)$. En particular, eso significa que existe una constante $C_{\text{reg}} > 0$ independiente de f tal que

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C_{\text{reg}}\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Teorema 56. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio Lipschitz, \mathcal{T} una malla sobre Ω . Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ solución del problema Dirichlet homogéneo del Laplaciano (3.4) y $u_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ su aproximación de elementos finitos. Si Ω es convexo, entonces*

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)},$$

Proof. Sea $w \in H_0^1(\Omega)$ solución del problema

$$\begin{aligned} -\Delta w &= u - u_h && \text{in } \Omega, \\ w &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Según las condiciones del teorema, $w \in H^2(\Omega)$ y

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C_{\text{reg}}\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Sea $w_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ la aproximación de elementos finitos a w . Entonces

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (\nabla w, \nabla(u - u_h))_{\Omega} = (\nabla(w - w_h), \nabla(u - u_h))_{\Omega} \\ &\leq \|\nabla(w - w_h)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq Ch\|w\|_{H^2(\Omega)} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq CC_{\text{reg}}h\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

Chapter 5

Elementos finitos para problemas parabólicos

El objetivo de este capítulo es estudiar métodos de elementos finitos para problemas parabólicos. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio Lipschitz y T un tiempo final. Dadas funciones f y u_0 , estamos buscando una función $u(x, t)$ que resuelve la ecuación de calor

$$\begin{aligned}u' - \Delta u &= f && \text{in } \Omega \times (0, T), \\u(x, t) &= 0 && \text{para todo } x \in \partial\Omega, t \in (0, T), \\u(x, 0) &= u_0(x) && \text{para todo } x \in \Omega.\end{aligned}$$

Vamos a integrar por parte el Laplaciano para llegar a la siguiente formulación débil: Para $f \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ y $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, hallar $u \in C^1([0, T]; H_0^1(\Omega))$ tal que

$$\begin{aligned}(u'(t), v)_\Omega + (\nabla u(t), \nabla v)_\Omega &= (f(t), v)_\Omega && \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega), \\u(0) &= u_0\end{aligned}\tag{5.1}$$

Notamos que hay formulaciones aún mas débiles que permiten $u_0 \in L^2(\Omega)$.

Recordamos continuidad y diferenciabilidad de funciones con valores en espacios de Banach. Por ejemplo, si $u : (0, T) \rightarrow X$ para un espacio de Banach X , entonces se dice que u es diferenciable en t si existe un $u'(t) \in X$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|h^{-1}(u(t+h) - u(t)) - u'(t)\|_X = 0.$$

Si $X = H$ es Hilbert, entonces $u \in C^1((0, T), H)$ implica que $t \mapsto \|u(t)\|_H^2$ es diferenciable y

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 = 2(u'(t), u(t))_H.$$

Primero mostramos un resultado que establece estabilidad de una solución de (5.1), y, dado que es lineal, su unicidad.

Teorema 57. *Si u es solución de (5.1), entonces*

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|u'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

Si, además, $\alpha > 0$ es la constante de elipticidad $\alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (\nabla v, \nabla v)_\Omega$, entonces

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\alpha t} \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \|f(s)\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

Proof. Notamos que $\nabla u \in C^1((0, T); L^2(\Omega))$, y que

$$\|k^{-1}(\nabla u(t+k) - \nabla u(t)) - \nabla u'(t)\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|k^{-1}(u(t+k) - u(t)) - u'(t)\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Tomando el límite $k \rightarrow \infty$ vemos que $(\nabla u(t))' = \nabla u'(t)$. Para mostrar la primera desigualdad, usamos en (5.1) la función test $v = u'(s)$,

$$(u'(s), u'(s))_\Omega + (\nabla u(s), \nabla u'(s))_\Omega = (f(s), u'(s))_\Omega,$$

y la observación anterior nos lleva a

$$\|u'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Por lo tanto,

$$\|u'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d}{ds} \|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

e integrando de 0 a t muestra la primera desigualdad. Para mostrar la segunda desigualdad, supongamos primero que $\|u(s)\|_{L^2(\Omega)} > 0$ para todo $0 < s < t$. Entonces notamos que

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} = \frac{(u'(t), u(t))_\Omega}{\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Usando $v = u(s)$ en (5.1) obtenemos

$$\begin{aligned} & \|u(s)\|_{L^2(\Omega)} \left(\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \right) \Big|_{t=s} + \alpha \|u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \|u(s)\|_{L^2(\Omega)} \left(\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \right) \Big|_{t=s} + (\nabla u(s), \nabla u(s))_\Omega \\ & = (u'(s), u(s))_\Omega + (\nabla u(s), \nabla u(s))_\Omega \\ & = (f(s), u(s)) \leq \|f(s)\|_{L^2(\Omega)} \|u(s)\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

y usando que $\|u(s)\|_{L^2(\Omega)} > 0$ para todo $0 < s < t$,

$$\left(\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \right) \Big|_{t=s} + \alpha \|u(s)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Eso implica

$$\frac{d}{dt} (e^{\alpha t} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}) \Big|_{t=s} \leq e^{\alpha s} \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Integrar la última desigualdad de 0 a t muestra el resultado. En el caso $\|u(s)\|_{L^2(\Omega)} = 0$ para algún s , se aplica el mismo argumento a la función $\sqrt{\|u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon}$. \square

5.1 La formulación semidiscreta con elementos finitos

Primero vamos a discretizar solamente en Ω . Sea \mathcal{T} una malla de Ω , entonces la formulación semidiscreta de (5.1) es: hallar $u_h \in C^1([0, T]; \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}))$ tal que

$$\begin{aligned} (u_h', v_h)_\Omega + (\nabla u_h, \nabla v_h)_\Omega &= (f(t), v_h)_\Omega \quad \text{para todo } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}), \\ u_h(0) &= u_{0h}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde u_{0h} es una aproximación a u_0 . Sea $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ una base de $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$, entonces podemos escribir $u_h(x, t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j(t) \phi_j(x)$. Si $u_{0h} = \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_{0,j} \phi_j$, entonces (5.2) se puede formular como

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j'(t) (\phi_j, \phi_k)_\Omega + \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j(t) (\nabla \phi_j, \nabla \phi_k)_\Omega &= (f, \phi_k)_\Omega, \quad \text{para todo } k = 1, \dots, n, \\ \mathbf{u}_j(0) &= \mathbf{u}_{0,j}. \end{aligned}$$

Es decir, si $\mathbf{A}, \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son las matrices dadas por

$$\mathbf{A}_{j,k} = (\nabla \phi_k, \nabla \phi_j)_\Omega, \quad \mathbf{M}_{j,k} = (\phi_k, \phi_j)_\Omega, \quad j, k = 1, \dots, n,$$

entonces la función vectorial $\mathbf{u}(t) = (\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_n(t))$ resuelve

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{u}' + \mathbf{A}\mathbf{u} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

con la función vectorial $\mathbf{b}(t)$ dada por $\mathbf{b}_k(t) = (f(t), \phi_k)_\Omega$. La matriz \mathbf{A} es nuestra matriz de elementos finitos, y ya sabemos que es simétrica y definida positiva. Notamos también que \mathbf{M} es simétrica y definida positiva. En particular las dos matrices son regulares, y vemos que la función \mathbf{u} es solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u}, \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0. \end{aligned}$$

Dado que f es continua en el tiempo, concluimos que el (5.3), respectivamente (5.2), tienen única solución \mathbf{u} .

La demostración de Teorema 57 se puede copiar literalmente para obtener el siguiente resultado.

Lema 58. *Sea $u_h \in C^1([0, T]; \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}))$ solución de (5.2). Entonces*

$$\|\nabla u_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|u_h'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \|\nabla u_{0h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds,$$

y

$$\|u_h(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\alpha t} \|u_{0h}\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \|f(s)\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

□

Ahora acotamos el error $\|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)}$.

Teorema 59. *Sea u solución de (5.1) y $u_h \in C^1([0, T]; \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}))$ solución de (5.2). Sea $\mathbb{G}_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ la proyección de Galerkin con respecto al Laplaciano, es decir*

$$(\nabla \mathbb{G}_h u, v_h)_\Omega = (\nabla u, \nabla v_h)_\Omega \quad \text{para todo } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|\nabla(u(t) - u_h(t))\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\nabla(u(t) - \mathbb{G}_h u(t))\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \|\nabla(\mathbb{G}_h u_0 - u_{0h})\|_{L^2(\Omega)} + \left(\int_0^t \|u'(s) - \mathbb{G}_h u'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u(t) - \mathbb{G}_h u(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + e^{-\alpha t} \|\mathbb{G}_h u_0 - u_{0h}\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \|u'(s) - \mathbb{G}_h u'(s)\|_{L^2(\Omega)} ds. \end{aligned}$$

Proof. Podemos escribir $u(t) - u_h(t) = \rho(t) + \theta(t)$ con $\rho_h(t) := u(t) - \mathbb{G}_h u(t)$, $\theta_h(t) := \mathbb{G}_h u(t) - u_h(t)$. Notamos que por la desigualdad de triangulo será suficiente acotar θ_h . Primero, $\mathbb{G}_h u \in C([0, T], \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}))$. Además, por la linealidad y continuidad de \mathbb{G}_h ,

$$\|k^{-1}(\mathbb{G}_h u(t+k) - \mathbb{G}_h u(t)) - \mathbb{G}_h u'(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \lesssim \|k^{-1}(u(t+k) - u(t)) - u'(t)\|_{H_0^1(\Omega)},$$

y tomando el límite $k \rightarrow 0$ obtenemos $(\mathbb{G}_h u(t))' = \mathbb{G}_h u'(t)$, en particular $\mathbb{G}_h u \in C^1([0, T], \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}))$. Por lo tanto, $\theta_h \in C^1([0, T], \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}))$. Además, para $v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$,

$$\begin{aligned} (\mathbb{G}_h u'(t), v_h)_\Omega + (\nabla \mathbb{G}_h u(t), \nabla v_h)_\Omega &= (\mathbb{G}_h u'(t), v_h)_\Omega + (\nabla u(t), \nabla v_h)_\Omega \\ &= (\mathbb{G}_h u'(t), v_h)_\Omega + (f(t), v_h)_\Omega - (u'(t), v_h)_\Omega \\ &= (\mathbb{G}_h u'(t) - u'(t), v_h)_\Omega + (u'_h(t), v_h)_\Omega + (\nabla u_h(t), \nabla v_h)_\Omega, \end{aligned}$$

es decir, $\theta_h \in C^1([0, T], \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}))$ resuelve

$$\begin{aligned} (\theta'_h(t), v_h)_\Omega + (\nabla \theta_h(t), \nabla v_h)_\Omega &= -(\rho'(t), v_h)_\Omega \quad \text{para todo } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}), \\ \theta_h(0) &= \mathbb{G}_h u_0 - u_{0h}. \end{aligned}$$

El Lema 58 implica lo enunciado. □

Consecuencia del último resultado son los siguientes ordenes de convergencia, donde involucramos errores en H^1 y, usando Aubin-Nitsche, en $L^2(\Omega)$ de la proyección de Galerkin \mathbb{G}_h .

Corolario 60. Sea u solución de (5.1) y $u_h \in C^1([0, T]; \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}))$ solución de (5.2), donde $u_{0h} = \mathbb{G}_h u_0$. Entonces

$$\|\nabla(u(t) - u_h(t))\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \left(\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} + \left(\int_0^t \|u'(s)\|_{H^2(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \right)$$

y

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \left(\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} + \int_0^t \|u'(s)\|_{H^2(\Omega)} ds \right).$$

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es convexo, entonces

$$\|\nabla(u(t) - u_h(t))\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \left(\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} + \left(\int_0^t \|u'(s)\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \right).$$

y

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch \left(\|u(t)\|_{H^1(\Omega)} + \int_0^t \|u'(s)\|_{H^1(\Omega)} ds \right), \\ \|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^2 \left(\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} + \int_0^t \|u'(s)\|_{H^2(\Omega)} ds \right). \end{aligned}$$

□

5.2 Discretización completa

Para obtener un método computable, vamos a discretizar la derivada temporal en (5.2) usando métodos para ecuaciones diferenciales ordinarias. Vamos a ver que es necesario usar métodos implícitos. Como motivación, consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y'(t) + \lambda y(t) &= 0, \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

con $\lambda > 0$. La solución exacta es obviamente $y(t) = y_0 e^{-\lambda t}$, y dado que $\lambda > 0$, obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

El Euler explícito en este caso se lee $y_{j+1} = y_j - k\lambda y_j = y_j(1 - \lambda k)$, es decir, $y_j = y_0(1 - \lambda k)^j$. Por lo tanto, si $\lambda k > 2$, entonces $|1 - \lambda k| > 1$, y concluimos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |y_j| = \infty.$$

En otras palabras, el Euler explícito no refleja el comportamiento cualitativo de la solución, salvo en el caso

$$k < \frac{2}{\lambda}.$$

Es decir, si $\lambda > 0$ es muy grande, necesitamos un paso temporal k muy pequeño para recuperar un comportamiento cualitativo importante. Por otro lado, el Euler implícito $y_j = y_0/(1 + \lambda k)^j$ no sufre del mismo efecto y se prefiere en este caso. Para aplicar los mismos argumentos a nuestro problema (5.3), tenemos que desacoplar el sistema de EDOs primero, es decir, diagonalizar $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$. Notamos que los autovalores de esta matriz son exactamente los autovalores de $\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1/2}$. Esta última matriz es simétrica y definida positiva, y la podemos diagonalizar en una base orthonormal $\tilde{\mathbf{V}}$,

$$\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1/2} = \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{D}\tilde{\mathbf{V}}^\top,$$

donde \mathbf{D} es la matriz diagonal con los autovalores (que son todos reales y positivos). Si definimos $\mathbf{V} := \mathbf{M}^{-1/2}\tilde{\mathbf{V}}$, entonces $\mathbf{V}^\top\mathbf{M}\mathbf{V} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{V}^\top\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{D}$, y con $\mathbf{u} = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{u}}$ nuestro sistema (5.3) es equivalente a

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}' + \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{V}^\top\mathbf{b}, \\ \tilde{\mathbf{u}}(0) &= \mathbf{V}^\top\mathbf{u}_0,\end{aligned}$$

Concluimos entonces que si los autovalores de $\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1/2}$, es decir, de $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$, son grandes, entonces una discretización temporal con un Euler explícito sufrirá del mismo efecto antes mencionado. Ahora sea \mathcal{T}_h una malla de Ω con resolución h . Consideramos $\phi_x \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ una función techo asociada a un nodo. Escribimos $\phi_x = \sum_j \alpha_j \mathbf{v}_j$, donde \mathbf{v}_j son los elementos de la base \mathbf{V} . Dado que

$$\begin{aligned}1 &\sim \|\nabla\phi_x\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_j \alpha_j^2 \lambda_j, \\ h^2 &\sim \|\phi_x\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_j \alpha_j^2,\end{aligned}$$

podemos ver que $\lambda_j \sim h^{-2}$.

Discretizamos entonces la derivada temporal usando un método de Euler implícito. Sea $k > 0$ el paso temporal y $t_n := nk$. La formulación (5.2) se transforma en

$$\begin{aligned}(u_h^{n+1}, v_h)_\Omega + k(\nabla u_h^{n+1}, \nabla v_h)_\Omega &= k(f(t_{n+1}), v_h)_\Omega + (u_h^n, v_h)_\Omega \quad \text{para todo } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}), \\ u_h^0 &= u_{0h},\end{aligned}\tag{5.4}$$

En notación matricial, eso se lee

$$(\mathbf{M} + k\mathbf{A})u^{n+1} = k\mathbf{b}^{n+1} + \mathbf{M}u^n.$$

Teorema 61. *Sea u solución de (5.1) y u_h^n solución de (5.4). Entonces, para $n \geq 1$,*

$$\begin{aligned} \|u(t_n) - u_h^n\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u(t_n) - \mathbb{G}_h u(t_n)\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbb{G}_h u_0 - u_{0h}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \int_0^{t_n} \|(\mathbb{G}_h - 1)u'(s)\|_{L^2(\Omega)} ds + k \int_0^{t_n} \|u''(s)\|_{L^2(\Omega)} ds. \end{aligned}$$

Proof. Escribimos $u(t_n) - u_h^n = \rho_h^n + \theta_h^n$, con $\rho_h^n := u(t_n) - \mathbb{G}_h u(t_n)$ y $\theta_h^n = \mathbb{G}_h u(t_n) - u_h^n$. Por la desigualdad de triángulo será suficiente acotar θ_h^n . Vamos a ver la ecuación que resuelve θ_h^n . Anotamos $\bar{\partial}\theta_h^n := k^{-1}(\theta_h^n - \theta_h^{n-1})$, entonces

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}\theta_h^n, v_h)_\Omega + (\nabla\theta_h^n, \nabla v_h)_\Omega &= (\bar{\partial}\mathbb{G}_h u(t_n), v_h)_\Omega + (\nabla\mathbb{G}_h u(t_n), \nabla v_h)_\Omega - (\bar{\partial}u_h^n, v_h)_\Omega - (\nabla u_h^n, \nabla v_h)_\Omega \\ &= (\bar{\partial}\mathbb{G}_h u(t_n), v_h)_\Omega + (\nabla u(t_n), \nabla v_h)_\Omega - (f(t_n), v_h) \\ &= (\bar{\partial}\mathbb{G}_h u(t_n) - u'(t_n), v_h)_\Omega. \end{aligned}$$

Usando $v_h = \theta_h^n$ llegamos a

$$\|\theta_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - (\theta_h^{n-1}, \theta_h^n) = k(\bar{\partial}\theta_h^n, \theta_h^n)_\Omega \leq k\|\bar{\partial}\mathbb{G}_h u(t_n) - u'(t_n)\|_{L^2(\Omega)}\|\theta_h^n\|_{L^2(\Omega)},$$

es decir

$$\|\theta_h^n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\theta_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} + k\|\bar{\partial}\mathbb{G}_h u(t_n) - u'(t_n)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Aplicamos esta última desigualdad recursivamente, obtenemos

$$\|\theta_h^n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\theta_h^0\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^n k\|\bar{\partial}\mathbb{G}_h u(t_j) - u'(t_j)\|_{L^2(\Omega)}.$$

El primer término al lado derecho es obviamente $\|\theta_h^0\|_{L^2(\Omega)} = \|\mathbb{G}_h u_0 - u_{0h}\|_{L^2(\Omega)}$. Para acotar la suma, escribimos

$$\bar{\partial}\mathbb{G}_h u(t_j) - u'(t_j) = (\bar{\partial}\mathbb{G}_h u(t_j) - \bar{\partial}u(t_j)) + (\bar{\partial}u(t_j) - u'(t_j))$$

y notamos

$$\bar{\partial}\mathbb{G}_h u(t_j) - \bar{\partial}u(t_j) = k^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\mathbb{G}_h - 1)u'(s) ds.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^n k\|\bar{\partial}\mathbb{G}_h u(t_j) - \bar{\partial}u(t_j)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|(\mathbb{G}_h - 1)u'(s)\|_{L^2(\Omega)} ds = \int_0^{t_n} \|(\mathbb{G}_h - 1)u'(s)\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

Además, integración por parte muestra

$$k(\bar{\partial}u(t_j) - u'(t_j)) = u(t_j) - u(t_{j-1}) - ku'(t_j) = - \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1})u''(s) ds,$$

y por lo tanto

$$\sum_{j=1}^n k \|\bar{\partial}u(t_j) - u'(t_j)\|_{L^2(\Omega)} \leq k \int_0^{t_n} \|u''(s)\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

□

Como en el caso del método semi-discreto, el último resultado implica los siguientes ordenes de convergencia, donde involucramos errores en H^1 y, usando Aubin-Nitsche, en $L^2(\Omega)$ de la proyección de Galerkin \mathbb{G}_h .

Corolario 62. *Sea u solución de (5.1) y u_h^n solución de (5.4), donde $u_{0h} = \mathbb{G}_h u_0$. Entonces*

$$\|u(t_n) - u_h^n\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \left(\|u(t_n)\|_{H^2(\Omega)} + \int_0^{t_n} \|u'(s)\|_{H^2(\Omega)} ds \right) + k \int_0^{t_n} \|u''(s)\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es convexo, entonces

$$\|u(t_n) - u_h^n\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \left(\|u(t_n)\|_{H^2(\Omega)} + \int_0^{t_n} \|u'(s)\|_{H^2(\Omega)} ds \right) + k \int_0^{t_n} \|u''(s)\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

□

5.3 Valores iniciales no regulares

A partir de ahora supongamos $f = 0$, es decir $u' = \Delta u$. Del curso de EDP sabemos que si $u_0 \in L^2(\Omega)$, entonces u es suave para cualquier tiempo positivo, es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene $u \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [\varepsilon, T])$. Además, se puede mostrar que para $t > 0$, se tiene para cualquier $m \in \mathbb{N}_0$

$$u(t) \in \widehat{H}^m(\Omega) := \{v \in H^m(\Omega) \mid (\Delta^j v)|_{\partial\Omega} = 0, \quad 0 \leq j < m/2\}.$$

Notamos que $\widehat{H}^0(\Omega) = L^2(\Omega)$, $\widehat{H}^1(\Omega) = H_0^1(\Omega)$, $\widehat{H}^2(\Omega) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

5.3.1 Valores iniciales en $H_0^1(\Omega)$

Si el dato inicial cumple $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, entonces se sabe que

$$u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)), \quad u \in C^1((0, T); L^2(\Omega)).$$

Teorema 63. *Sea $f = 0$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, y sea $u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0, T); L^2(\Omega))$ una solución de (5.1). Entonces*

$$\frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + t \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + t^2 \|\nabla \Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t s^2 \|\Delta^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2 ds = \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Proof. Si $f = 0$, entonces de la demostración del Teorema 57 podemos concluir

$$\frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds = \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Notamos que

$$\frac{d}{ds} s \|\Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2s(\Delta u(s), \Delta u'(s))_\Omega = \|\Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2s \|\nabla \Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Integrando de $\varepsilon > 0$ a t y tomando en cuenta que $\varepsilon \|\Delta u(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0$, pues $\int_0^t \|\Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds < \infty$, obtenemos

$$\int_0^t \|\Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds = t \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t s \|\nabla \Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

Luego, notamos que

$$\frac{d}{ds} s^2 \|\nabla \Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2s \|\nabla \Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2s^2 (\nabla \Delta u(s), \nabla \Delta u'(s))_\Omega = 2s \|\nabla \Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2s^2 \|\Delta^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Integrando de $\varepsilon > 0$ a t y tomando en cuenta que $\varepsilon^2 \|\nabla \Delta u(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0$, pues $\int_0^t s \|\nabla \Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds < \infty$, obtenemos

$$2 \int_0^t s \|\nabla \Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds = t^2 \|\nabla \Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t s^2 \|\Delta^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2 ds,$$

lo que muestra el resultado. \square

En Corolarios 60 y 62 necesitabamos para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ convexo por lo menos

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \quad \text{y también} \quad \int_0^t \|u'(s)\|_{H^1(\Omega)} ds = \int_0^t \|\Delta u(s)\|_{H^1(\Omega)} ds < \infty$$

para obtener orden de convergencia h . Tomando en cuenta el último resultado, podemos esperar que

$$\|\Delta u(t)\|_{H^1(\Omega)} \sim t^{-1} \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)},$$

y por lo tanto $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ no será suficiente regularidad para obtener $\int_0^t \|\Delta u(s)\|_{H^1(\Omega)} ds < \infty$. En otras palabras, la condición $\int_0^t \|\Delta u(s)\|_{H^1(\Omega)} ds < \infty$ es mas fuerte que $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, y nuestro primer objetivo será evitarla. Es conveniente introducir un poco de notación: Para $\ell \in H^{-1}(\Omega)$ definimos $(-\Delta)^{-1}\ell \in H_0^1(\Omega)$ como la solución del problema Dirichlet con lado derecho ℓ , es decir

$$(\nabla(-\Delta)^{-1}\ell, \nabla v)_\Omega = \ell(v) \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega),$$

en particular $(-\Delta^{-1})$ es lineal y continuo,

$$\|(-\Delta)^{-1}\ell\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \|\ell\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Notamos que el operador $(-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ es positivo y simétrico en $L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned} ((-\Delta)^{-1}g, g)_\Omega &= (\nabla(-\Delta)^{-1}g, \nabla(-\Delta)^{-1}g)_\Omega \geq 0, \\ ((-\Delta)^{-1}g, f)_\Omega &= (\nabla(-\Delta)^{-1}g, \nabla(-\Delta)^{-1}f)_\Omega = (g, (-\Delta)^{-1}f)_\Omega. \end{aligned}$$

Notamos que también $T_h := \mathbb{G}_h(-\Delta)^{-1}$ es lineal y continuo, y simétrico y definido positivo en $L^2(\Omega)$.

Lema 64. *Tenemos*

$$\begin{aligned} \int_0^t \|u(s) - u_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds &\lesssim \|u_0 - u_{0h}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \int_0^t \|u(s) - \mathbb{G}_h u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \\ t\|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\lesssim t\|u(t) - \mathbb{G}_h u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_0 - u_{0h}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ &\quad + \int_0^t \|u(s) - \mathbb{G}_h u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + s^2\|u'(s) - \mathbb{G}_h u'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned}$$

Proof. Sea $e_h(s) := u(s) - u_h(s)$. Notamos que para todo $v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$,

$$(e_h'(s), v_h)_\Omega = (u'(s) - u_h'(s), v_h)_\Omega = (\nabla(u_h(s) - u(s)), \nabla v_h)_\Omega = (\nabla(u_h(s) - \mathbb{G}_h u(s)), \nabla v_h)_\Omega,$$

es decir $T_h e_h'(s) = \mathbb{G}_h \Delta^{-1} e_h'(s) = \mathbb{G}_h (u_h(s) - u(s)) = u_h(s) - \mathbb{G}_h u(s)$, y por lo tanto

$$T_h e_h'(s) + e_h(s) = u(s) - \mathbb{G}_h u(s) = \rho_h(s). \quad (5.5)$$

Por la simetría de T_h ,

$$\frac{d}{ds} (T_h e_h(s), e_h(s))_\Omega = 2(T_h e_h'(s), e_h(s))_\Omega,$$

y multiplicando (5.5) con $e_h(s)$ e integrando sobre Ω obtenemos

$$\frac{d}{ds} (T_h e_h(s), e_h(s))_\Omega + 2\|e_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2(\rho_h(s), e_h(s))_\Omega \leq \|\rho_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Integrando de 0 hasta t obtenemos, usando la continuidad de T_h ,

$$\begin{aligned} (T_h e_h(t), e_h(t))_\Omega + \int_0^t \|e_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds &\leq (T_h e_h(0), e_h(0))_\Omega + \int_0^t \|\rho_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ &\lesssim \|e_h(0)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\rho_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \end{aligned}$$

y dado que T_h es definido positivo obtenemos la primer desigualdad.

Para demostrar la segunda, multiplicamos (5.5) con $2se'_h(s)$, integramos sobre Ω y usamos que T_h es definido positivo para obtener

$$s \frac{d}{ds} \|e_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2s(\rho_s(s), e'_h(s))_\Omega.$$

Dado que

$$\begin{aligned} s \frac{d}{ds} \|e_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \frac{d}{ds} s \|e_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|e_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ s(\rho_s(s), e'_h(s))_\Omega &= \frac{d}{ds} s(\rho_h(s), e_h(s))_\Omega - (\rho_h(s), e_h(s))_\Omega - s(\rho'_h(s), e_h(s))_\Omega \end{aligned}$$

obtenemos

$$\frac{d}{ds} s \|e_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|e_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \frac{d}{ds} s(\rho_h(s), e_h(s))_\Omega - 2(\rho_h(s), e_h(s))_\Omega - 2s(\rho'_h(s), e'_h(s))_\Omega.$$

Ahora integramos de 0 a t y usamos Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} t \|e_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq 2t \|\rho_h(t)\|_{L^2(\Omega)} \|e_h(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \int_0^t \left(\|e_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + 2\|\rho_h(s)\|_{L^2(\Omega)} \|e_h(s)\|_{L^2(\Omega)} ds + 2s\|\rho'_h(s)\|_{L^2(\Omega)} \|e_h(s)\|_{L^2(\Omega)} \right) ds \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Young obtenemos el resultado. \square

Ahora podemos evitar la regularidad $\int_0^t \|\Delta u(s)\|_{H^1(\Omega)} ds < \infty$ y obtener orden de convergencia h , uniformemente en t , si $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

Corolario 65. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ convexo, entonces para $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ y $u_{0h} = \mathbb{G}_h u_0$. Entonces

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|u_0\|_{H^1(\Omega)},$$

donde $C > 0$ no depende de h o de t .

Proof. Empezamos con la segunda desigualdad de Lema 64,

$$\begin{aligned} t \|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\lesssim t \|u(t) - \mathbb{G}_h u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_0 - u_{0h}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ &\quad + \int_0^t \|u(s) - \mathbb{G}_h u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + s^2 \|u'(s) - \mathbb{G}_h u'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned}$$

Luego, por Teorema 63,

$$\begin{aligned} t \|u(t) - \mathbb{G}_h u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\lesssim th^2 \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim th^2 \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ \int_0^t \|u(s) - \mathbb{G}_h u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds &\lesssim h^2 \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \lesssim th^2 \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ \int_0^t s^2 \|u'(s) - \mathbb{G}_h u'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds &\lesssim h^2 \int_0^t s^2 \|\nabla u'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \lesssim th^2 \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Además,

$$\|u_0 - \mathbb{G}_h u_0\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq \|u_0 - \mathbb{G}_h u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim h^2 \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

\square

5.3.2 Valores iniciales en $L^2(\Omega)$

La regularidad $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ es muy fuerte para muchos problemas en la práctica. Se sabe lo siguiente:

(i) Si $f = 0$ y el dato inicial cumple $u_0 \in L^2(\Omega)$, entonces

$$u \in C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad u \in C((0, T); H_0^1(\Omega)), \quad u \in C^1((0, T); L^2(\Omega)).$$

(ii) Si $f \in L^2((0, T); L^2(\Omega))$ y $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, entonces

$$u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)), \quad u \in C^1((0, T); L^2(\Omega)).$$

Primero demostraremos un resultado parecido al Teorema 63.

Lema 66. *Dado las condiciones (i) de arriba, se tiene para $t \in (0, T)$,*

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + t \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + t^2 \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t s^2 \|\nabla u'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds = \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Proof. Primero mostraremos

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds = \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (5.6)$$

Podemos usar $v = u(s)$ en (5.1), e integrando por partes, dado que $u' \in C((0, T); L^2(\Omega))$, obtenemos

$$\frac{d}{ds} \|u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2(u'(s), u(s))_{L^2(\Omega)} \stackrel{(5.1)}{=} -\|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Por lo tanto, integrando de $\varepsilon > 0$ hasta t ,

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\varepsilon^t \|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds = \frac{1}{2} \|u(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Dado que $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$, el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ muestra lo deseado.

Ahora notamos que

$$\frac{d}{ds} s \|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2s(\nabla u(s), \nabla u'(s))_\Omega = \|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2s \|\Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Integramos de ε hasta t y pasamos al límite $\varepsilon \rightarrow 0$. Ya sabemos que $\|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2$ es integrable, por lo tanto $\varepsilon \|\nabla u(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0$, y obtenemos

$$\int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds = 2 \int_0^t s \|\Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + t \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Notamos que

$$\frac{d}{ds} s^2 \|\Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2s \|\Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2s^2 (\Delta u(s), \Delta u'(s))_{\Omega} = 2s \|\Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2s^2 \|\nabla u'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Integramos de ε hasta t y pasamos al límite $\varepsilon \rightarrow 0$. Notamos que ya sabemos que $s \|\Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2$ es integrable, por lo tanto $\varepsilon^2 \|\Delta u(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0$, y obtenemos

$$2 \int_0^t s \|\Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds = t^2 \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t s^2 \|\nabla u'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds,$$

y con eso se concluye el resultado. \square

Lema 67. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ convexo y $f \in L^2((0, T); L^2(\Omega))$. Según la condición (ii) de arriba, sea $w \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0, T); L^2(\Omega))$ solución de

$$\begin{aligned} (w'(t), v)_{\Omega} + (\nabla w(t), \nabla v)_{\Omega} &= (f(t), v)_{\Omega} \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega), \\ w(0) &= 0. \end{aligned}$$

Sea w_h la aproximación dada por

$$\begin{aligned} (w'_h(t), v_h)_{\Omega} + (\nabla w_h(t), \nabla v_h)_{\Omega} &= (f(t), v_h)_{\Omega} \quad \text{para todo } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}), \\ w_h(0) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces existe una constante $C > 0$ tal que para todo $t > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^t \|w'(s) - w'_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds &\leq C \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \\ \int_0^t \|\nabla(w(s) - w_h(s))\|_{L^2(\Omega)}^2 ds &\leq Ch^2 \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned}$$

Proof. Por la desigualdad de Young,

$$\int_0^t \|w'(s) - w'_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq C \int_0^t \|w'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w'_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

Como en la demostración de Teorema 57, usando $v = w'(s)$,

$$\|w'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d}{ds} \|\nabla w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Dado que $w(s) \rightarrow 0$ in $L^2(\Omega)$, se concluye que $\nabla w(s) \rightarrow 0$ in $L^2(\Omega)$, y obtenemos

$$\int_0^t \|w'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq C \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

El mismo argumento se aplica a w_h .

Sea $e(s) := w(s) - w_h(s)$ y $\rho(s) := w(s) - \mathbb{G}_h w(s)$. Notamos $(e'(s), v_h)_\Omega + (\nabla e(s), \nabla v_h)_\Omega = 0$ para todo $v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$, luego, usando Cauchy-Schwarz y la desigualdad de Young,

$$\begin{aligned} (e'(s), e(s))_\Omega + (\nabla e(s), \nabla e(s))_\Omega &= (e'(s), \rho(s))_\Omega + (\nabla e(s), \nabla \rho(s))_\Omega \\ &\leq C \left(h^2 \|e'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + h^{-2} \|\rho(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \rho(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \frac{1}{2} \|\nabla e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

es decir

$$\frac{d}{ds} \|e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(h^2 \|e'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + h^{-2} \|\rho(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \rho(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Integrar y usar $\|e(0)\|_{L^2(\Omega)} = 0$ llegamos a

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\nabla e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds &\leq C \int_0^t h^2 \|e'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + h^{-2} \|\rho(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \rho(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ &\leq Ch^2 \int_0^t \|e'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w(s)\|_{H^2(\Omega)}^2 ds \\ &\leq Ch^2 \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \end{aligned}$$

donde usamos la regularidad elíptica $\|w(s)\|_{H^2(\Omega)} \lesssim \|f(s)\|_{L^2(\Omega)} + \|w'(s)\|_{L^2(\Omega)}$ y los resultados anteriores. \square

Primero mostraremos que se puede obtener orden h en la norma $L^2((0, t); L^2(\Omega))$.

Lema 68. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ convexo. Sea u solución de (5.1) con $u_0 \in L^2(\Omega)$ y $f = 0$, y sea u_h su aproximación semidiscreta por elementos finitos con $u_{0h} = \Pi_h u_0$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que para todo $t > 0$,*

$$\int_0^t \|e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq Ch^2 \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Proof. Sea $e(s) := u(s) - u_h(s)$. En particular, $e \in L^2((0, T); H_0^1(\Omega))$. Consideramos el problema

$$\begin{aligned} w'(s) - \Delta w(s) &= e(t - s), \\ w &= 0, \\ w(0) &= 0, \end{aligned}$$

y sea w_h su aproximación por elementos finitos. Según Lema 67 existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$\int_0^t \|w'(s) - w'_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + h^{-2} \|\nabla(w(s) - w_h(s))\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq C_1 \int_0^t \|e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \quad (5.7)$$

y $C_1 > 0$ no depende de t . Notamos que

$$(e'(s), v_h)_\Omega + (\nabla e(s), \nabla v_h)_\Omega = 0, \quad (5.8a)$$

$$(w'(s) - w'_h(s), v_h)_\Omega + (\nabla(w(s) - w_h(s)), \nabla v_h)_\Omega = 0. \quad (5.8b)$$

Concluimos entonces

$$\begin{aligned} \|e(t-s)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (w'(s), e(t-s))_\Omega + (\nabla w(s), \nabla e(t-s))_\Omega \\ &= \frac{d}{ds}(w(s), e(t-s))_\Omega + (w(s), e'(t-s))_\Omega + (\nabla w(s), \nabla e(t-s))_\Omega \\ &\stackrel{(5.8a)}{=} \frac{d}{ds}(w(s), e(t-s))_\Omega + (w(s) - w_h(s), e'(t-s))_\Omega + (\nabla(w(s) - w_h(s)), \nabla e(t-s))_\Omega \\ &= \frac{d}{ds}(w_h(s), e(t-s))_\Omega + (w'(s) - w'_h(s), e(t-s))_\Omega + (\nabla(w(s) - w_h(s)), \nabla e(t-s))_\Omega \\ &\stackrel{(5.8b)}{=} \frac{d}{ds}(w_h(s), e(t-s))_\Omega + (w'(s) - w'_h(s), \rho(t-s))_\Omega + (\nabla(w(s) - w_h(s)), \nabla \rho(t-s))_\Omega, \end{aligned}$$

en donde $\rho(s) := u(s) - \mathbb{G}_h u(s)$. Ahora integramos ambos lados en s de 0 hasta t y obtenemos, usando la desigualdad de Young,

$$\begin{aligned} \int_0^t \|e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds &\leq (w_h(t), e(0))_\Omega - (w_h(0), e(t))_\Omega \\ &\quad + \varepsilon \int_0^t \|w'(s) - w'_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + h^{-2} \|\nabla(w(s) - w_h(s))\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ &\quad + C\varepsilon^{-1} \int_0^t \|\rho(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + h^2 \|\nabla \rho(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned}$$

Notamos que $w_h(0) = 0$, y por ortogonalidad, $(w_h(t), e(0))_\Omega = (w_h(t), u_0 - \Pi_h u_0)_\Omega = 0$. Usando 5.7 y un ε con $\varepsilon C_1 < 1/2$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \|e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds &\leq C \int_0^t \|\rho(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + h^2 \|\nabla \rho(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ &\leq Ch^2 \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ &\leq Ch^2 \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se concluye del Lema 66, cf. (5.6). \square

El último Lema nos permite mostrar el siguiente resultado.

Lema 69. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ convexo. Sea u solución de (5.1) con $u_0 \in L^2(\Omega)$ y $f = 0$, y sea u_h su aproximación semidiscreta por elementos finitos con $u_{0h} = \Pi_h u_0$. Entonces existe una constante $C > 0$, independiente de t y h , tal que*

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Cht^{-1/2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Proof. Escribimos $u(t) - u_h(t) = \rho(t) - \theta_h(t)$ con $\rho(t) = u(t) - \mathbb{G}_h u(t)$ y $\theta_h(t) = \mathbb{G}_h u(t) - u_h(t)$. Entonces, por Lema 66,

$$\|\rho(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch t^{-1/2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Como en Teorema 59 vemos que $\theta_h \in C^1([0, T], \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}))$ resuelve

$$(\theta_h'(s), v_h)_\Omega + (\nabla \theta_h(s), \nabla v_h)_\Omega = -(\rho'(s), v_h)_\Omega \quad \text{para todo } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}).$$

Usamos $v_h = 2s\theta_h(s)$ y obtenemos

$$\frac{d}{ds} s \|\theta_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2s \|\nabla \theta_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\theta_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2s(\rho'(s), \theta_h(s))_\Omega.$$

Integramos en s de ε hasta t ,

$$t \|\theta_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \varepsilon \|\theta_h(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\varepsilon^t \|\theta_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2s(\rho'(s), \theta_h(s))_\Omega ds.$$

Vemos que

$$\varepsilon \|\theta_h(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \varepsilon \|\rho(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|e(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim h^2 \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|e(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow h^2 \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

y también

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\theta_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2s(\rho'(s), \theta_h(s))_\Omega ds &\lesssim \int_0^t \|\theta_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + s^2 \|\rho'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ &\lesssim \int_0^t \|e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t \|\rho(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + s^2 \|\rho'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned}$$

La primera integral al lado derecho se controla usando Lema 68, mientras la segunda se controla usando Lema 66,

$$\int_0^t \|\rho(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + s^2 \|\rho'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \lesssim h^2 \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + s^2 \|\nabla u'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \lesssim h^2 \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

□